

# Electricitate și magnetism

Prof.dr. Alexandru STANCU

[alstancu@uaic.ro](mailto:alstancu@uaic.ro)

# Argumente pentru studiul electromagnetismului

- Aplicații tehnologice
- Element esențial/central al științei fizicii și al științei
- Important pentru înțelegerea unor fenomenelor naturale
- Important pentru înțelegerea chimiei și biologiei

# Tradiție (de ce la IAȘI ?)

- Dragomir HURMUZESCU
- Ștefan PROCOPIU

# Dragomir HURMUZESCU

**Dragomir Hurmuzescu** (13 martie 1865 - †31 mai 1954), fizician, inventator, profesor la Universitatea din Iași, membru al Academiei Române este fondatorul învățământului electrotehnic din România și colaborator al soților Curie. A avut contribuții în domeniile electricității și fizicii razelor X. A construit electroscopul care-i poartă numele. A pus bazele primului laborator de electricitate din țară, transformat apoi în Școala de Electricitate de pe lângă Universitatea din Iași prima școală de fizică experimentală. A fost ctitor al radiofoniei românești. În 1922, sub conducerea sa, a început să funcționeze Societatea Română de Radiodifuziune (Societatea de Difuziune Radiotelefonică din România), care la 1 noiembrie 1928 difuza în eter prima emisiune cu anunțul: *Alo, alo, aici Radio București*, urmat de discursul președintelui Societății, Dragomir Hurmuzescu. Este momentul ce inaugura, practic, postul național de radio din România.

# Stefan PROCOPIU

Stefan Procopiu was born in Bârlad, on 19 January 1890. Procopiu dedicated himself to science and research from the time he was still a student. The first remarkable results of his research were published in 1913, in Bulletin scientifique de l'Académie roumaine de sciences, within the famous paper Determining the Molecular Magnetic Moment by M. Planck's Quantum Theory. After studying Planck's quantum theory and Langevin's magnetism theory, Procopiu was the first to establish in the whole world the value of the molecular magnetic moment also named the theoretic magneton,  $M$ . It is recognized that Stefan Procopiu calculated the value of the theoretic magneton two years before Prof. A. Bohr of Denmark. In the Romanian specialized literature, this discovery is known as the Bohr-Procopiu magneton. Procopiu published 1913 the paper Experimental Research on Wireless Telegraphy, while in 1916 he invented a device for locating and establishing the depth of bullets in the bodies of the wounded. From 1919 in Paris, he attended the courses of famous scientists of the epoch, such as Gabriel Lippman, Marie Curie, Paul Langevin, Aymé Cotton. In 1921, Procopiu discovered and analyzed in the Physics Laboratory of Sorbonne University a new optical phenomenon which consisted in the longitudinal depolarization of light by suspensions and colloids. In 1930, the above phenomenon was designated as Procopiu Phenomenon by prof. A. Boutaric. On 5 March 1924, Procopiu obtained the title of doctor in physics with the work On The Electric Birefringence of Suspensions, sustained in front of a commission including coordinator prof. Aymé Cotton, and cross-examiners Charles Fabry and H. Mouton. Another important discovery, resulting from prof. Procopiu's research, is the electromotive force of galvanic elements. In the field of ferromagnetism, he undertook numerous studies whose results were published in many specialized magazines in Romania and abroad. Thus, in 1930, studying the Barkhausen effect, which consists in transferring alternative current through wires of ferromagnetic material, he discovered a circular effect of magnetic discontinuity. In 1951, this effect was named Procopiu Effect. A significant technical application of this effect was achieved by the American physicist Roman Storski in creating calculation devices. Back in Romania in 1925, with an unquestionable scientific renown in the field of physics, on 15 January Procopiu was appointed a professor in ordinary of the Gravitation, Heat and Electricity Department of "Al. I. Cuza" University of Iasi, department which he coordinated until 1962, the year of his retirement.

# Magnetonul Bohr

Bulletin scientifique de l'Académie  
Roumaine de sciences, 1913

150 MUSCELEANU, BESTIM. D. VERDAMPFUNGSWÄRME D. METALLE

sität des Stromes klein. Nach öfterem Gebrauch derselben Kathode verliert das Calcium-oxyd die weisse Farbe und nimmt eine gelblichbraune an, ohne aber an Wirk-samkeit zu verlieren.

b) Als Anode benutzte ich einen mit Glas umgebenen eisernen Fingerhut.

c) Den Anodenfall habe ich mit Hilfe einer Sonde ge-messen. Diese Sonde war folgendermassen konstruiert. Ein Platindraht war mit einem Kupferdraht verlötet und das freie Ende des Kupferdrahtes an ein Stückchen Eisen ge-lötet. An das andere Eisenende habe ich einen Lamet-faden befestigt und diesen durch einen angelöteten Kup-ferdraht, der mit Siegellack angekittet war. Der Platin-und Kupferdraht waren mit einem Glasrohr bedeckt, wom Platindraht blieb ungefähr 1 mm frei. Mit Hilfe eines Schliffes konnte man die Sonde so einsetzen, dass sie über der Anode in der Höhe von 2—3 mm lag. Die Sonde war mit der Nadel eines Quadrantelektrometers verbunden. Das Elektrometer war in diostatischer Schaltung.

d) Die erzeugte Temperatur, um die Metalle schmelzen und verdampfen zu können, habe ich mit Hilfe eines Ther-moelementes gemessen (Platin-Platin u. Rhodium, 10% Rh).

e) Den Druck habe ich vor und nach jedem Versuch mit Hilfe eines Mac-Leod Manometers gemessen.

d) Die Zeit, wie lange der Versuch dauerte, habe ich mit Hilfe einer Stoppuhr gemessen, die bis 1/5 Sekunde anzeigte.

Die erhaltenen Resultate kann man in die folgende Ta-belle zusammenfassen:

|                   | A         | L          | d mm Hg.          |
|-------------------|-----------|------------|-------------------|
| Quecksilber . . . | 73,8 cal. | 63,66 cal. | $2 \cdot 10^{-3}$ |
| Cadmium . . .     | 222,0 "   | 181,0 "    | "                 |
| Zink . . .        | 439,5 "   | 365,8 "    | "                 |
| Magnesium . . .   | 2027,0 "  | 1700,0 "   | "                 |
| Wismuth . . .     | 177,5 "   | 161,5 "    | "                 |

MUSCELEANU, BESTIM. D. VERDAMPFUNGSWÄRME D. METALLE 151

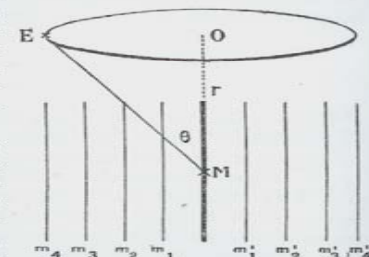
Die Formel von Trouton ist auf die Richtigkeit ge-prüft. Die erhaltenen Werte für Quecksilber, Zink u. Cad-mium sind zwischen 19—23, für Wismuth und Magne-sium 28—33.

PHYSIQUE. — ST. PROCOPIU, Détermination du moment mag-nétique moléculaire par la théorie des quanta de M. Planck. Note présentée par M. HEPITES dans la séance du 31 janvier 1913.

1. W. Ritz explique les spectres de raies (1) par la considération d'électrons qui oscillent dans un champ mag-nétique moléculaire, constitué de petits aimants, disposés en ligne, égaux entre eux et identiques pour tous les corps. Ces aimants élémentaires sur lesquels Ritz n'insiste point, correspondent au magnéton de P. Weiss, quantité élémentaire de magnétisme, ou plutôt un sous-multiple com-mun de tous les mo-ments magnétiques mo-léculaires connus.

En rapprochant ces essais de Ritz et de Weiss, de l'explica-tion du magnétisme de Langevin, on peut s'im-maginer ces magnétons, comme des électrons qui tournent autour de la molécule, comme la terre autour du soleil.

2. Supposons une série de ces magnétons, mais paral-



E, l'électron; O, la trajectoire;  $m_1, m_2, m_3, m_4, m'_1, m'_2, m'_3, m'_4$ , etc., les magnétons; M le moment résultant;  $\theta$ , l'angle de E avec M.

(1) Annalen der Physik, 25, p. 660, 1908.

# Pierre WEISS

## Pierre-Ernest Weiss

French physicist who investigated magnetism and determined the Weiss magneton unit of magnetic moment.

Weiss graduated (1887) at the head of his class from the Zürich Polytechnikum with a degree in mechanical engineering and was admitted to the École Normale Supérieure in Paris in 1888. He was named *maître de conférences* at the University of Rennes in 1895 and at the University of Lyons in 1899. In 1902 he became professor at the Zürich Polytechnikum, where Albert Einstein was a colleague. There he developed a great laboratory for magnetic research that attracted a number of well-known physicists. Assigned to the French Office of Inventions during World War I, he helped devise the Cotton-Weiss acoustical method of fixing enemy artillery positions. In 1919 he established a physics institute at the University of Strasbourg (France) that became a leading centre of magnetic research. He was elected to membership in the Paris Academy in 1926.

Weiss's chief work was on ferromagnetism. Hypothesizing a molecular magnetic field acting on individual atomic magnetic moments, he was able to construct mathematical descriptions of ferromagnetic behaviour, including an explanation of such magnetocaloric phenomena as the Curie point. His theory succeeded also in predicting a discontinuity in the specific heat of a ferromagnetic substance at the Curie point and suggested that spontaneous magnetization could occur in such materials; the latter phenomenon was later found to occur in very small regions known as Weiss domains. His major published work was *Le magnetisme* (with G. Foex, 1926).



L. 1405  
Bibl. „M. L. C. M. A.” Fac. de Fizicã  
— BIBL. DE FIZICĂ —  
T. 402

Nº 71.

UNIVERSITATEA DIN IASI  
COLLECTION ARMAND COLIN  
(Section de Physique)

DE  
CĂLDURĂ ȘI ELECTRICITATE

# Magnétisme

par

Pierre WEISS

Correspondant de l'Institut  
Professeur à la Faculté  
des Sciences de Strasbourg

Gabriel FOEX

Maitre de Conférences  
à la Faculté des Sciences  
de Strasbourg

69 figures



LIBRAIRIE ARMAND COLIN  
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS



## CHAPITRE XII

### LES MOMENTS ATOMIQUES <sup>1</sup>

**Les moments élémentaires.** — De l'ensemble des moments atomiques dont on disposait en 1911, il a été possible de déduire <sup>2</sup> un moment élémentaire dont les moments atomiques seraient des multiples entiers. La valeur numérique donnée pour ce *magnéton* expérimental était :

1123,5 c.g.s.

rapportée à l'atome-gramme. Ce nombre repose plus particulièrement sur la valeur de l'aimantation à saturation à 20° abs. du fer (11 magnétons) et du nickel (3 magnétons).

On possède actuellement, par l'ensemble des mesures sur les solutions, une valeur probablement plus précise :

1126 c.g.s.

Cette détermination, qui repose en dernière analyse sur le coefficient d'aimantation de l'eau, actuellement bien connu, doit être préférée. Néanmoins, les nombres de magnétons donnés plus loin sont encore exprimés au moyen de la valeur ancienne 1123,5.

Plusieurs auteurs, indépendamment <sup>3</sup>, ont montr

1. Voir pour plus de détails : *J. de Phys.*, t. V, p. 124, 1924.

2. Pierre WEISS, *J. de Phys.*, 5<sup>e</sup> s., t. I, 1911, pp. 900 et 965.

3. EINSTEIN, PROCOPIU, CHALMERS, WEREIDE. Voir la déduction chap. XV, p. 204, éq. (52).

que la théorie des quanta donne le moment élémentaire :

$$\frac{h}{4\pi} \cdot \frac{e}{m},$$

où  $h$  est la constante de Planck ;  $\frac{e}{m}$ , le rapport de la charge à la masse de l'électron.

Soit  $A$  le nombre d'Avogadro ; le moment élémentaire rapporté à l'atome-gramme est :

$$\mu = A \frac{h}{4\pi} \cdot \frac{e}{m}. \quad (51)$$

Ce moment élémentaire est celui qui s'introduit par la construction de l'atome d'après Bohr. Nous l'appellerons le magnéton de Bohr.

En adoptant les valeurs des « International physical Tables »

$$A = 6,061 \times 10^{23},$$

$$h = 6,554 \times 10^{-27},$$

$$\frac{e}{m} = 5,305 \times 10^{17} \text{ u.e.s.}$$

$$c = 2,9986 \times 10^{10},$$

on trouve :

$$\mu = 5\,592,7$$

pour le magnéton de Bohr. La cinquième partie, 1118,5, n'est que de 6,7 p. 1000 plus petite que le magnéton expérimental, 1126.

Il n'est pas impossible que celui-ci soit exactement la cinquième partie du magnéton de Bohr. Cependant, étant donnée la précision avec laquelle tous les éléments de la comparaison sont connus, la différence de 6,7 p. 1000 paraît déjà un peu forte.

**La détermination des moments atomiques.** — On utilise suivant les cas deux procédés différents pour déterminer les moments atomiques. Lorsque la substance est ferromagnétique, on déduit la valeur du moment de l'in-

tensité de l'aimantation spécifique  $\sigma$  mesurée à une température très basse et dans un champ très élevé. Des extrapolations faibles et très sûres vers  $H = \infty$  et  $T = 0$  donnent la saturation absolue et, en multipliant par la masse atomique, le moment atomique.

Pour les paramagnétiques, le calcul du moment se fait à partir de la constante de Curie.

La théorie de Langevin conduit, comme nous l'avons vu p. 51, à la relation (13) :

$$\Sigma_0 = \sqrt{3RCm}$$

entre le moment de l'atome-gramme  $\Sigma_0$  et la constante de Curie.  $m$  désigne la molécule magnétique, c'est-à-dire la quantité de matière à laquelle se trouve rigidement un aimant élémentaire subissant de façon indépendante la répartition statistique<sup>1</sup>.

Mais la théorie de Langevin n'est pas la seule possible ; deux conceptions se trouvent en présence, celle des orbites électroniques dont les plans occupent un nombre limité d'orientations déterminées par les règles de quantification (p. 204) et celle de la continuité de l'orientation des moments atomiques dans l'espace (Langevin). La première de ces hypothèses a reçu une confirmation importante par les expériences de Gerlach et Stern (chapitre XV) sur l'aimantation de divers métaux à l'état de gaz monoatomiques.

A propos du calcul du moment de l'oxygène<sup>2</sup>, en maintenant en principe la quantification des orientations des orbites, cette théorie a été modifiée en y mettant que la direction privilégiée par rapport à laquelle se fait la quantification est entraînée avec la molécule dans l'agitation thermique<sup>3</sup>. On arrive ainsi à com-

1. Voir note p. 47.

2. Pierre WEISS, *Journal de Physique*, t. 4 (1923), p. 153.

3. Cette idée est due à Ed. Bauer.

# Activități didactice

- Curs 3 ore pe săptămână
- Laborator 2 ore pe săptămână
- Seminar 2 ore pe săptămână

# Tematica abordată

- Electrostatică; sarcini și câmpuri
- Potențial electric
- Câmpul electric în jurul conductorilor
- Curenți electrici
- Câmpul purtătorilor de sarcină în mișcare

# Tematica abordată

- Câmpul magnetic
- Inducția electromagnetică și ecuațiile lui Maxwell
- Circuite de curent alternativ
- Câmpuri electrice în substanță
- Câmpuri magnetice în substanță

# Bibliografie recomandată

1. Electricitate și magnetism, Edward M. Purcell, Cursul de fizică BERKELEY, vol. II, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982.
2. Orice alt curs de electricitate și magnetism
3. Orice culegere de probleme
4. Pagina web a Departamentului de Fizica

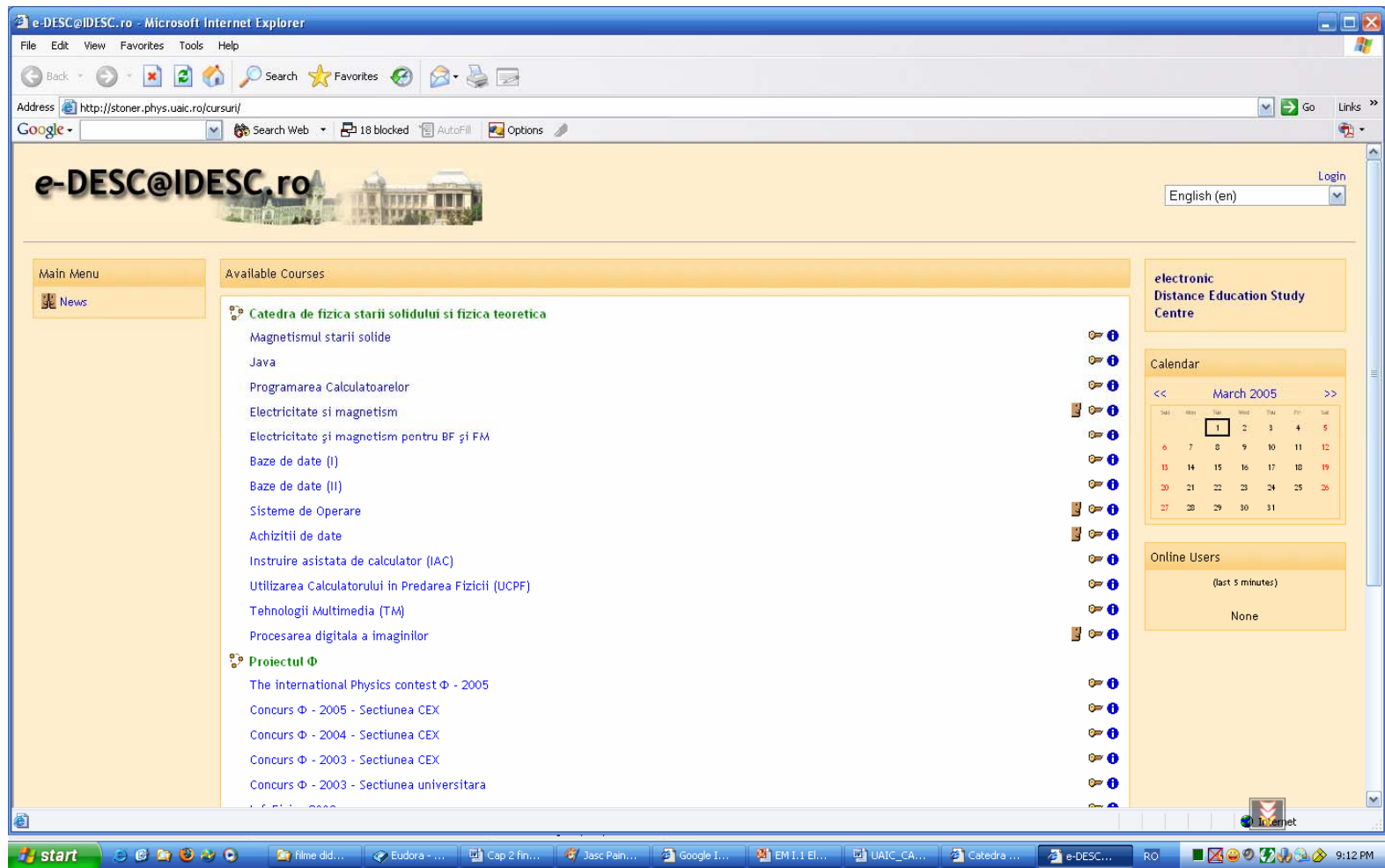
<http://stoner.phys.uaic.ro>

cursuri

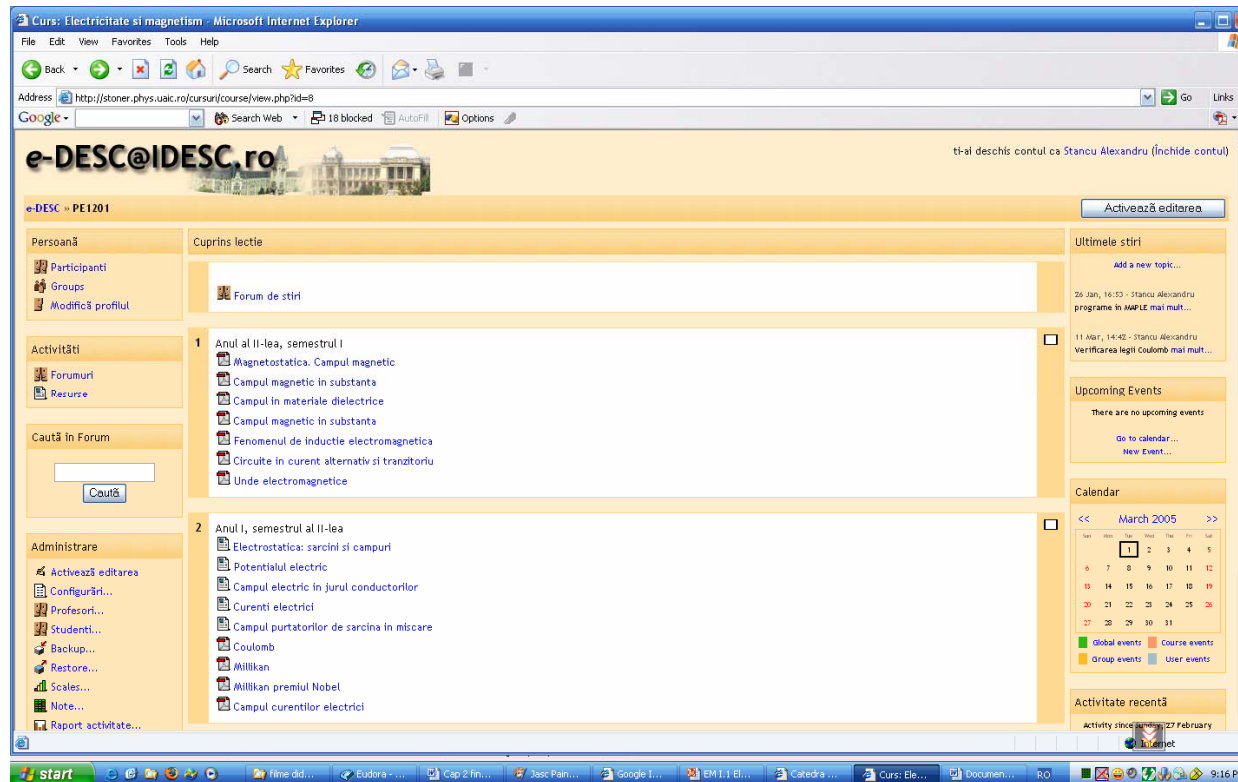
Enrollment key: EM



# eLearning



# Materiale de studiu



Simulări ... MAPLE

prof.dr. Alexandru STANCU 2009

# Bibliografie (electromagnetism)

- Cursul de la Berkeley (vol. II)
  - Electricitate și magnetism
  - E.M.Purcell
- Lectures on Physics (vol. II)
  - R.P. Feynman
- Electrodinamica mediilor continue
  - L.D. Landau și E.M. Lifșit
- Bazele teoriei electricității
  - I.E. Tamm

# Nota

50% ... activitatea la seminar și laborator (mid-term)

50% ... examen final

teza ... 20 probleme/intrebări

oral ... teorie/aplicații

# Electrostatică: sarcini și câmpuri

- Sarcina electrică
- Conservarea sarcinii
- Legea lui Coulomb
- Energia unui sistem de purtători de sarcini
- Câmpul electric
- Distribuții de sarcină
- Flux
- Legea lui Gauss
- Aplicații

# Sarcina electrică

- **Observații empirice (forța electrică/forța magnetică)**
  - Thales din Milet în urmă cu 2500 de ani (electrizarea corpurilor prin frecare)
  - China antică în urmă cu 5000 de ani (magneții naturali)

Platon (în urmă cu 2400 de ani)

“Piatra pe care Euripide a numit-o magnetică și care este numită în mod obișnuit a lui Hercule (...) nu atrage numai inelele de fier; ea comunică inelelor o forță care le dă puterea ce-i aparține însăși pietrei, aceea de a atrage alte inele, astfel că se vede uneori un foarte lung lanț de inele de fier care atârnă unul de altul. Și forța lor a tuturor depinde de această piatră.”



# Din observații empirice ...

- Există două tipuri de sarcină electrică (pozitivă și negativă)
- Sarcina se conservă
- Sarcina se cuantifică

Într-un sistem izolat, sarcina electrică totală, adică suma algebrică a sarcinilor pozitive și negative, se conservă.

Exemplu:

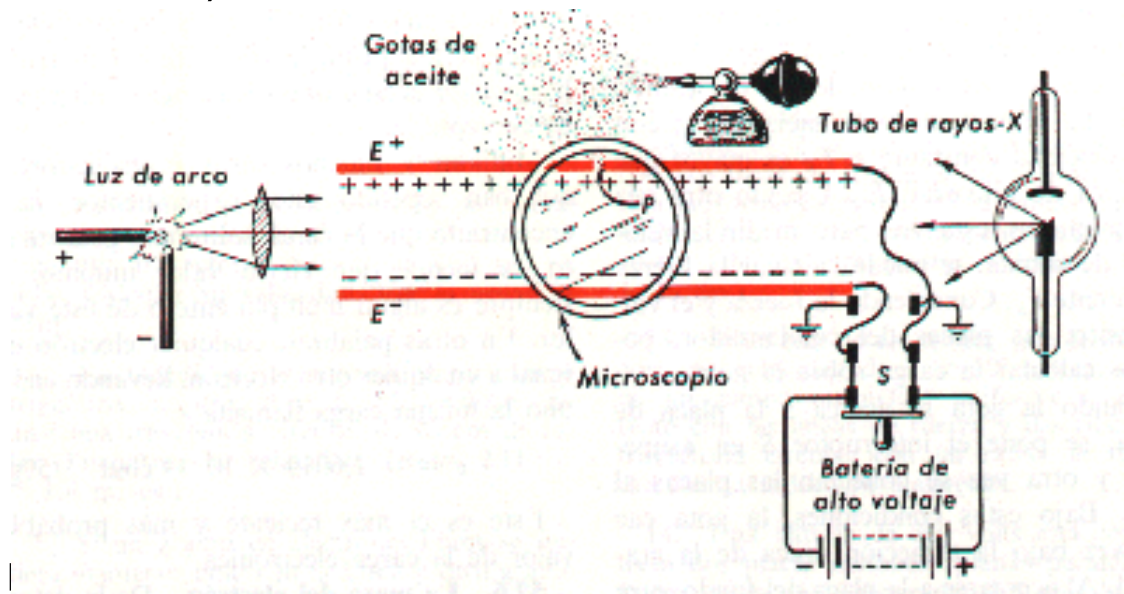
foton  $\rightarrow$  electron + pozitron

# Cuantificarea sarcinii electrice

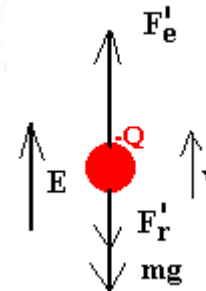
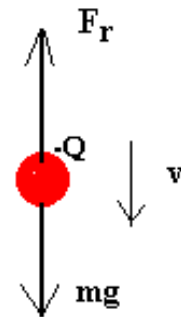
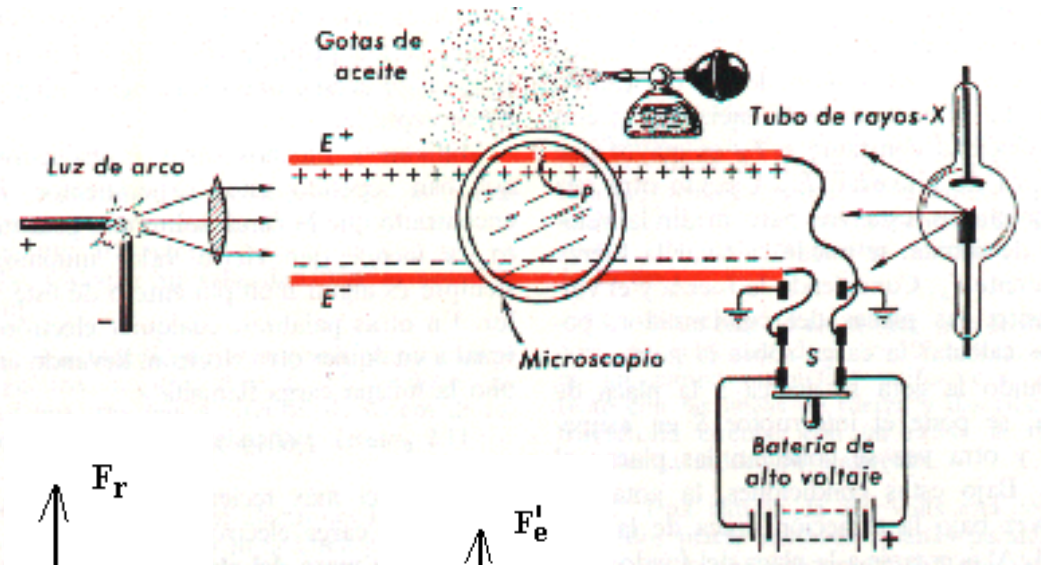
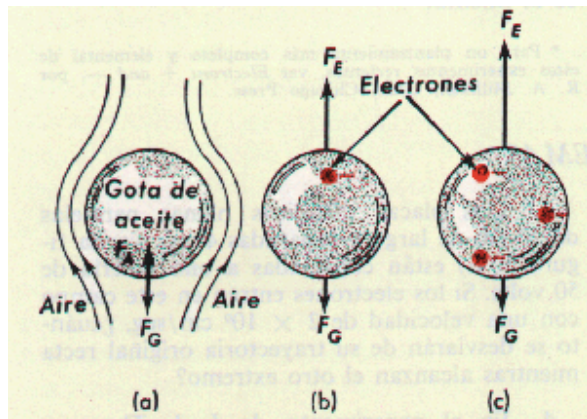
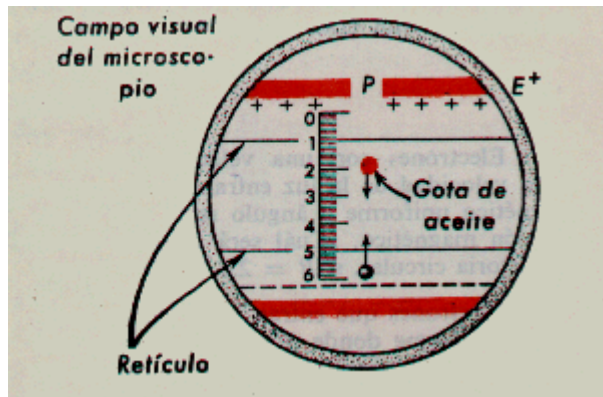
## Experiența lui Millikan

[Robert A. Millikan](#)

([Nobel Prize for Physics](#) 1923 )

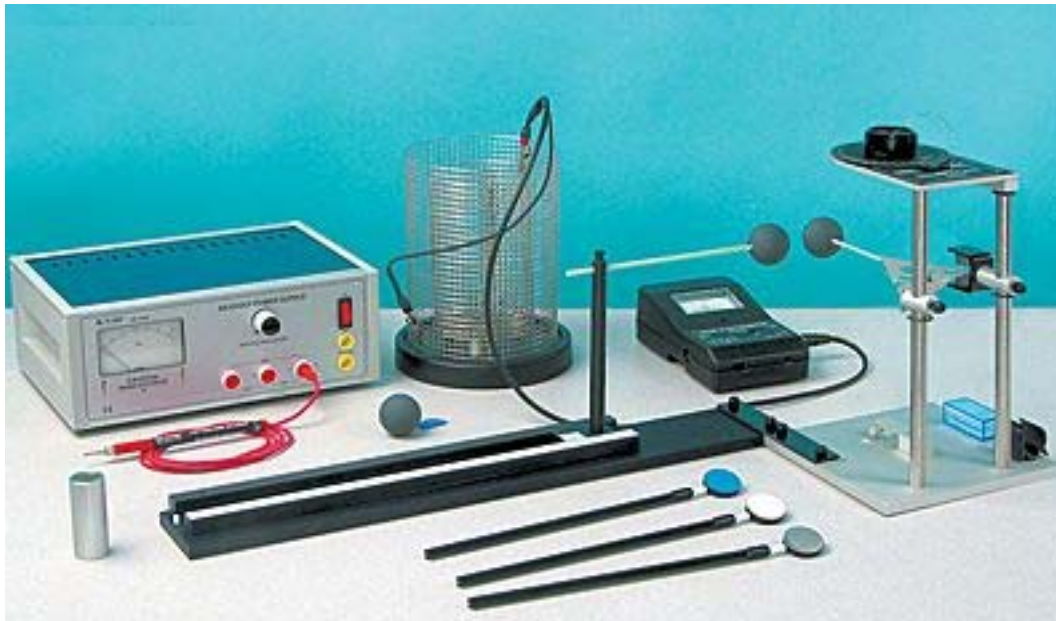


# Experimentul lui Millikan

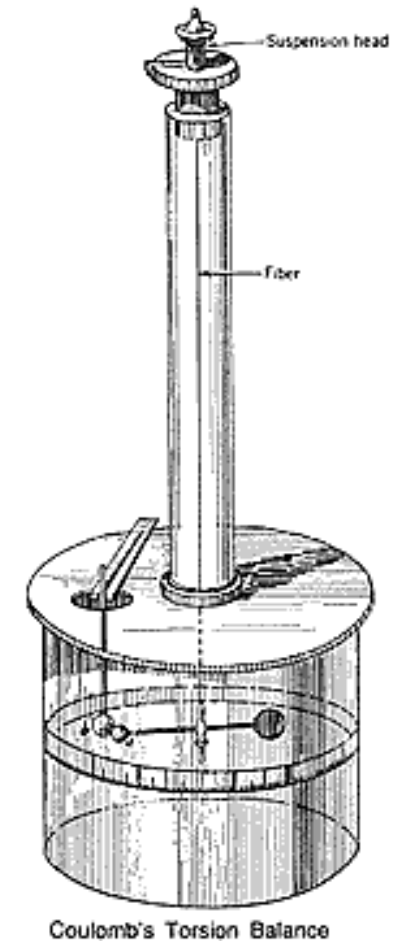


# Legea lui Coulomb

- Charles Auguste de Coulomb
  - Născut la 14 iulie 1736, Franța
  - 1785, interacțiunea dintre mici sfere încărcate electric (balanța de torsiune)
  - Prima lege cantitativă în domeniul electricității

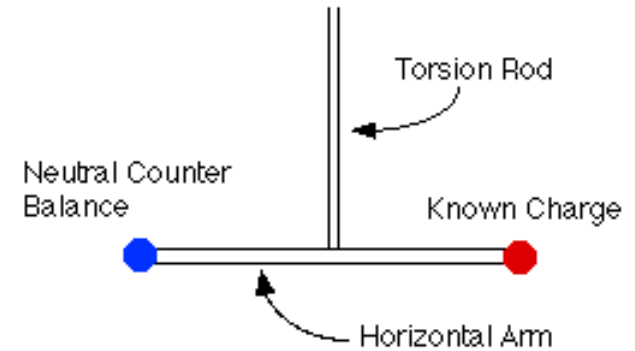


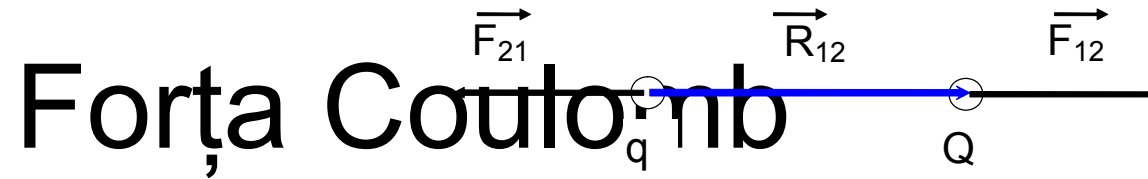
prof.dr. Alexandru STANCU 2009



# Istoric

- Utilizând o balanță de torsiune, Coulomb a demonstrat în mod direct că două sarcini interacționează cu o forță ce variază invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele.



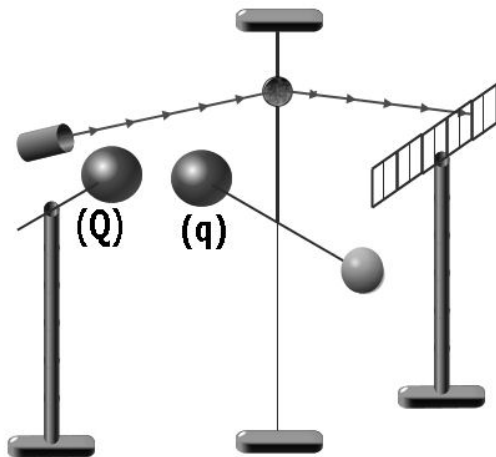


$$\vec{F}_{12} = kqQ \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

**În Sistemul Internațional**

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8.8544187818 \cdot 10^{-12} F/m$$

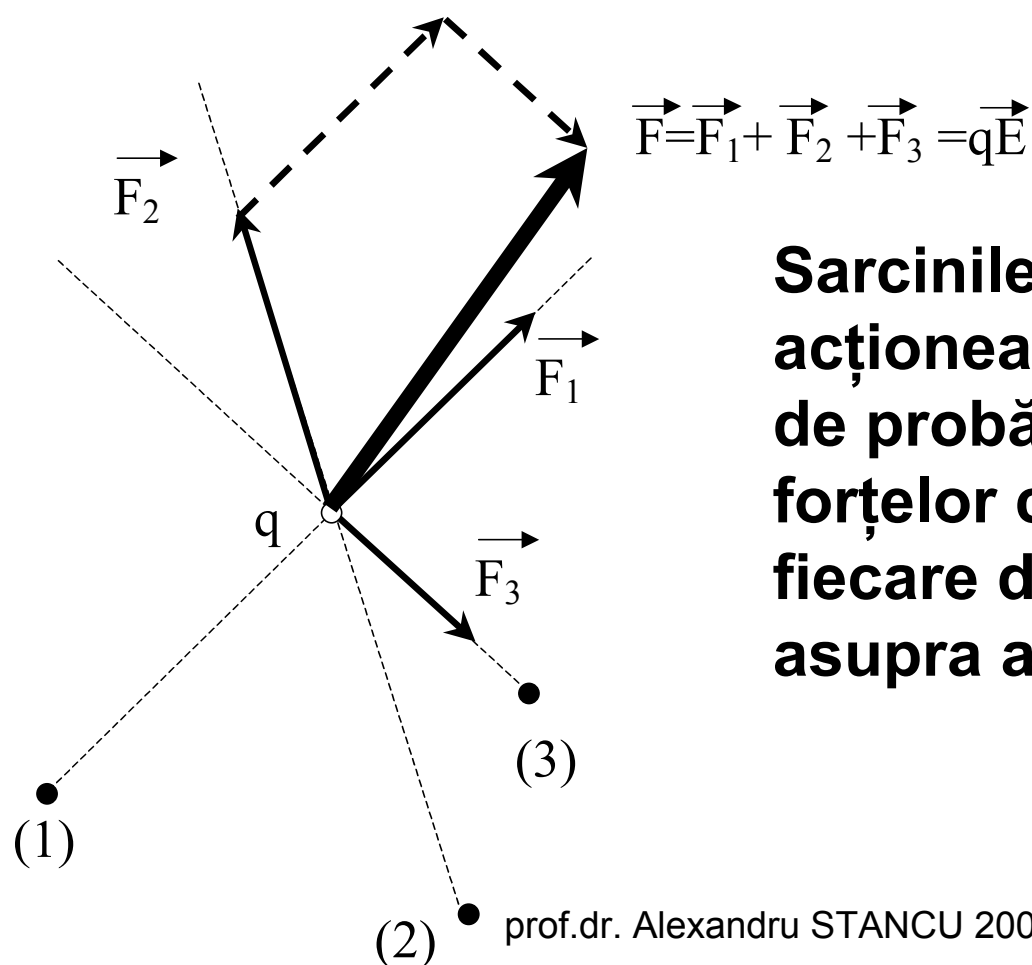
Film [Legea lui Coulomb](#)



**În starea de echilibru mecanic a sistemului din figură se poate determina forța care acționează asupra sarcinii q.**



# Principiul superpoziției



**Sarcinile “1”, “2” și “3”  
acționează asupra sarcinii  
de probă  $q$  prin rezultanta  
forțelor cu care ar acționa  
fiecare din ele separat  
asupra acesteia.**

# Potențialul electric

$$L_{ab} = \int_A^B \vec{F}_0 \cdot d\vec{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qq_0 \int_A^B \frac{\vec{R} \cdot d\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

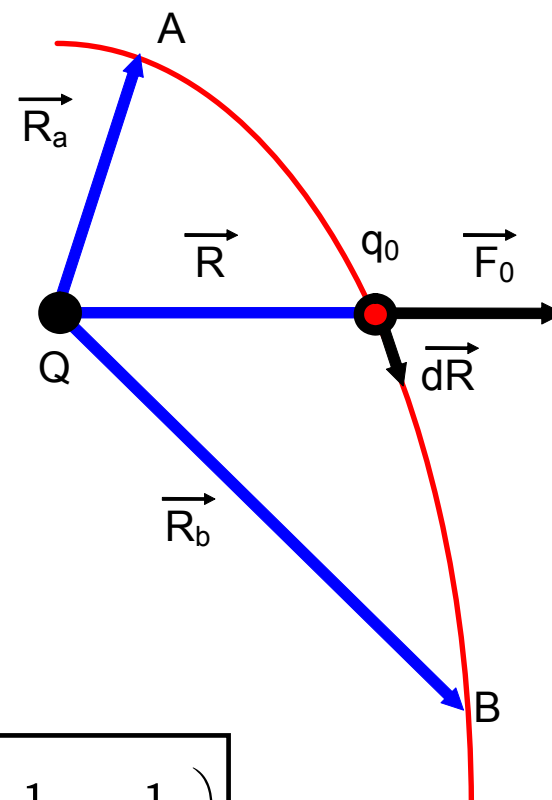
$$\vec{R} \cdot d\vec{R} = xdx + ydy + zdz,$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$2RdR = 2xdx + 2ydy + 2zdz, \text{ deci}$$

$$\vec{R} \cdot d\vec{R} = RdR$$

$$L_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qq_0 \int_A^B \frac{dR}{R^2} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$$



# Diferența de potențial

$$L_{ab} = q_0 U = -q_0 (V_b - V_a)$$

$$U = V_a - V_b$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Potențialul electric se determină în mod relativ nu în mod absolut

*Potențialul electric al sarcinii punctiforme într-un punct la distanța  $R$  se definește ca fiind o mărime scalară, numeric egală cu lucrul efectuat de forțele electrostatice pentru a deplasa sarcina unitară de la distanța  $R$  până la infinit, sau altfel, ca o mărime numeric egală cu lucrul efectuat de forțele exterioare pentru a aduce sarcina unitară de la infinit la distanța  $R$ . Potențialul definit în acest fel este numit potențial coulombian. La infinit potențialul coulombian este nul.*

# Energia unui sistem de sarcini electrice punctiforme

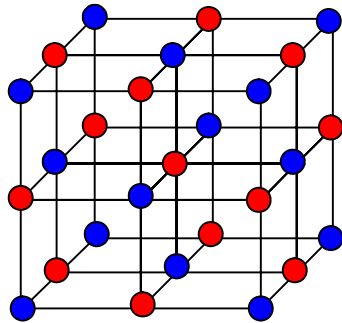
$$\begin{array}{cc} q_1, V_{12} & q_2, V_{21} \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

$$W = q_2 V_{21} = q_1 V_{12} = \frac{1}{2} (q_1 V_{12} + q_2 V_{21}) = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

$$W = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots + q_n V_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

# Energia unei rețele cristaline

Cristalul de clorură de sodiu  $(Na^+, Cl^-)$



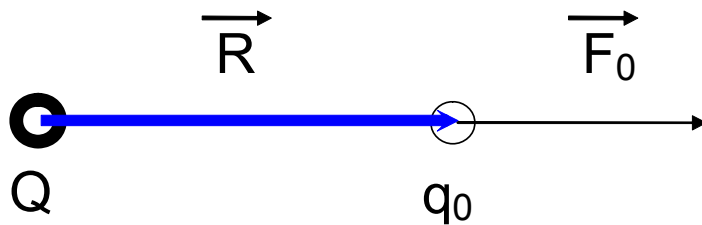
$$W = \frac{1}{2} \frac{N}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{6e^2}{a} + \frac{12e^2}{\sqrt{2}a} - \frac{8e^2}{\sqrt{3}a} + \dots \right]$$

# Intensitatea câmpului electric

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

Film Intensitatea câmpului electric

Definiția generală



Câmpul creat de o  
sarcină electrică  
punctiformă

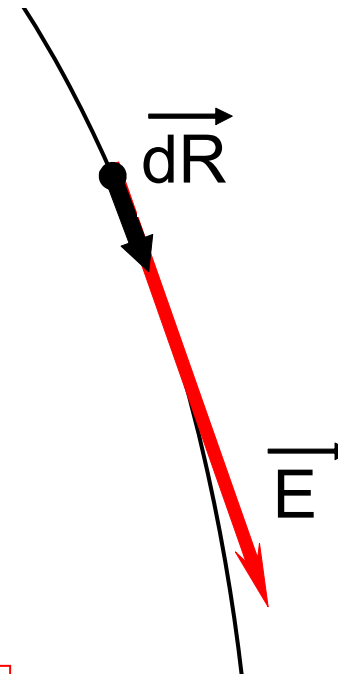
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3}$$



# Linii de câmp electric

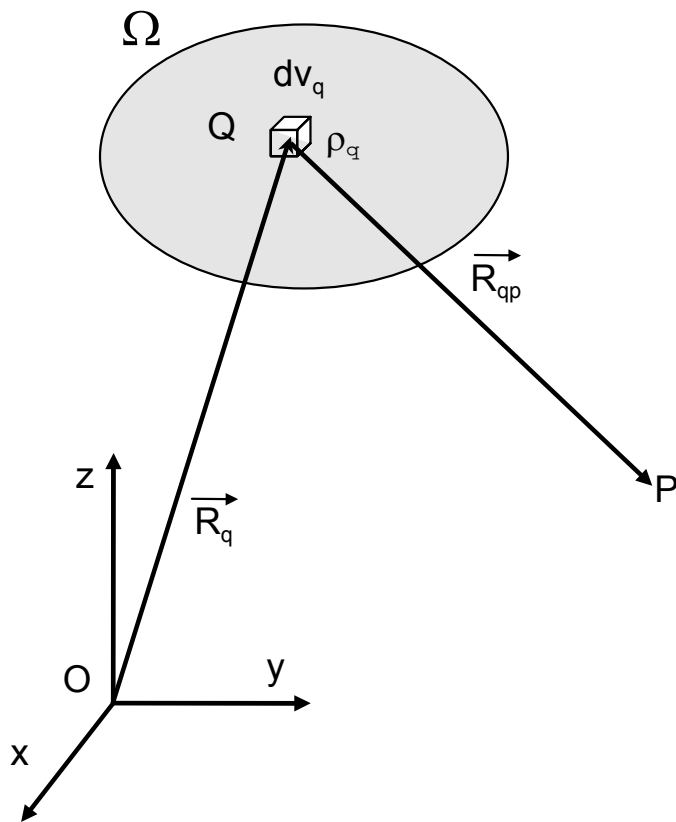
$$\vec{E} \times d\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & E_y & E_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$



Film [Suprafețe echipotențiale și linii de câmp](#)

# Distribuții de sarcină electrică



$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv}$$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Omega)} \frac{\vec{R}_{qp}}{R_{qp}^3} \rho_q dv_q$$

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(\Omega)} \frac{1}{R_{qp}} \rho_q dv_q$$

# Relația dintre câmp și potențial

$$dL = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{R} = -q_0 dV$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$$

$$d\vec{R} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{R} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

# Relația dintre câmp și potențial

$$dL = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{R} = -q_0 dV$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{R} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

# Relația dintre câmp și potențial

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = \\ &= -\left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) V = -\nabla V = -\text{grad} V\end{aligned}$$

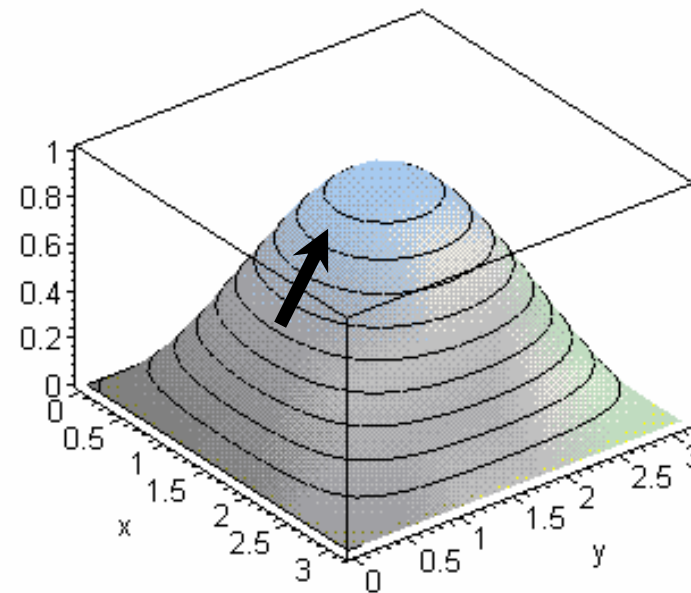
# Gradientul unei funcții scalare

$$d\vec{R} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\text{grad} \equiv \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$df = \text{grad}(f) \cdot d\vec{R}$$



# Suprafețe echipotențiale

$$V = V_0 = \text{const.}$$

$$dV = 0$$

$$dV = \text{grad}V \cdot d\vec{R}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{R} = 0$$

$$\vec{E} \perp d\vec{R}$$

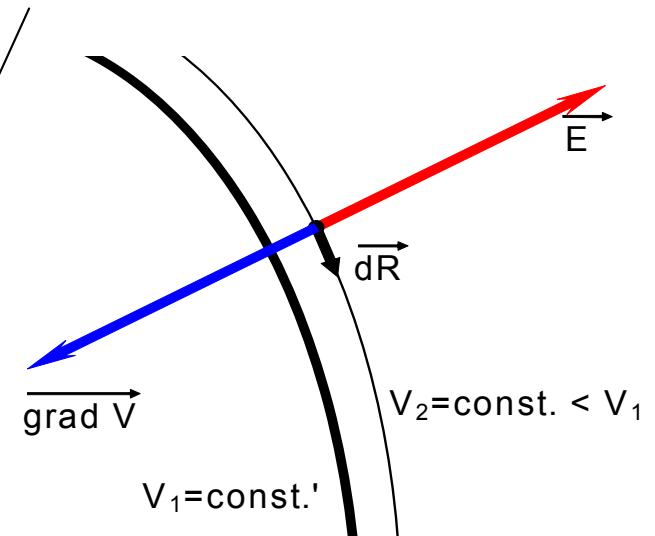
$$\text{grad}V \perp d\vec{R}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \text{grad}V \cdot d\vec{R} = 0$$

# Suprafețe echipotențiale - linii de câmp

$$V = V_0 = \text{const.}$$

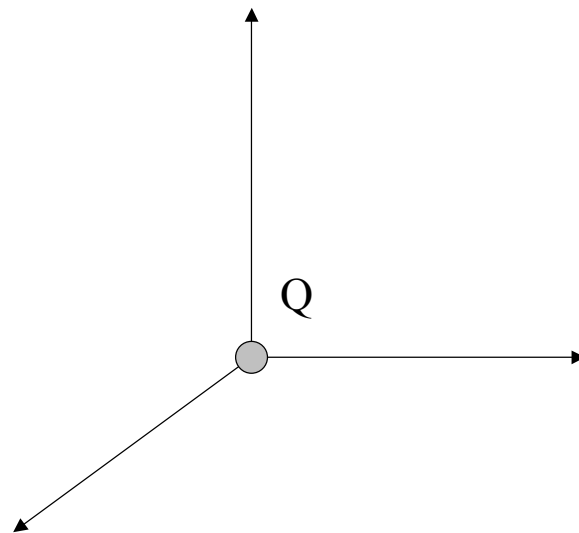
$$\vec{E} \times d\vec{R} = 0$$



$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -\nabla V = -\text{grad} V$$

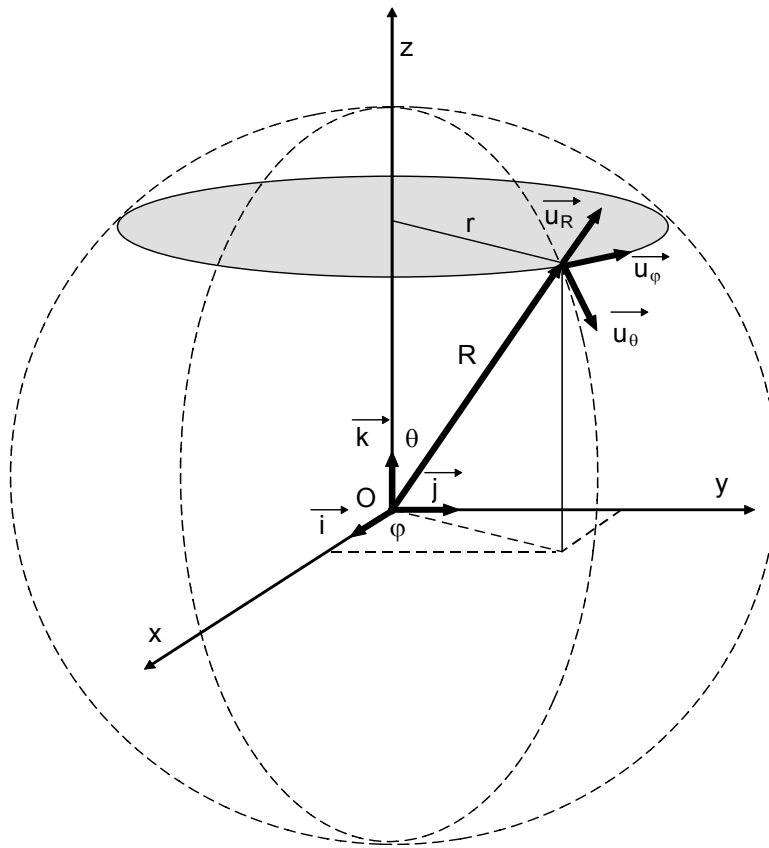


# Câmpul sarcinii punctuale



Simetria  
problemei

# Câmpul sarcinii punctiforme



$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

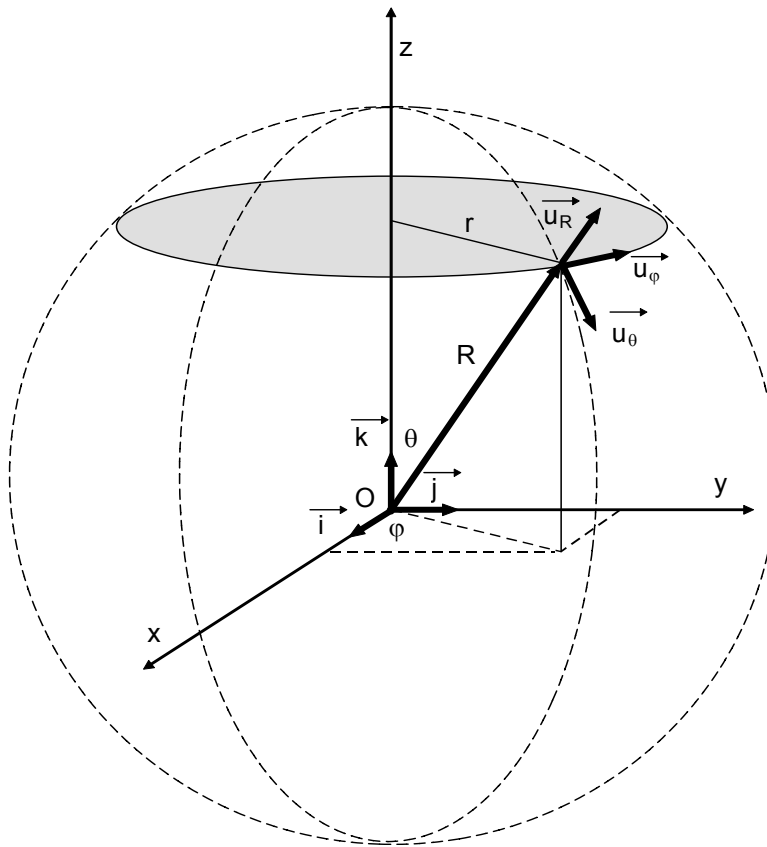
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x}{R^3},$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{y}{R^3},$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{z}{R^3}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

# Coordonate sferice



$$\begin{cases} x_p = R_p \sin \theta_p \cos \phi_p \\ y_p = R_p \sin \theta_p \sin \phi_p \\ z_p = R_p \cos \theta_p \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{R} = V_0$$

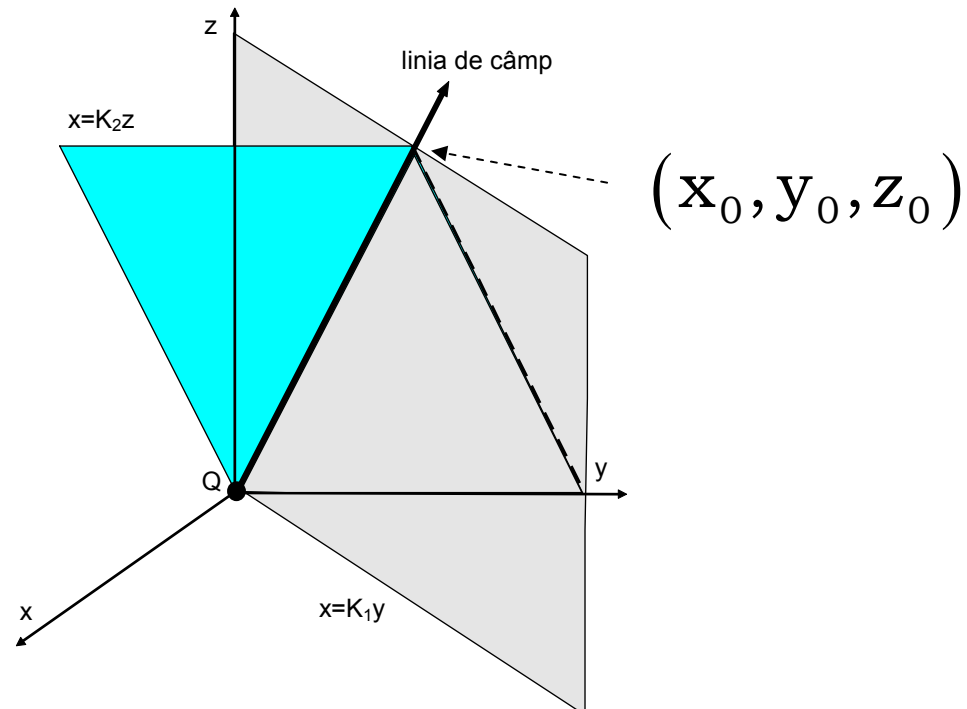
$$R = R_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{1}{V_0}$$

# Câmpul sarcinii punctiforme

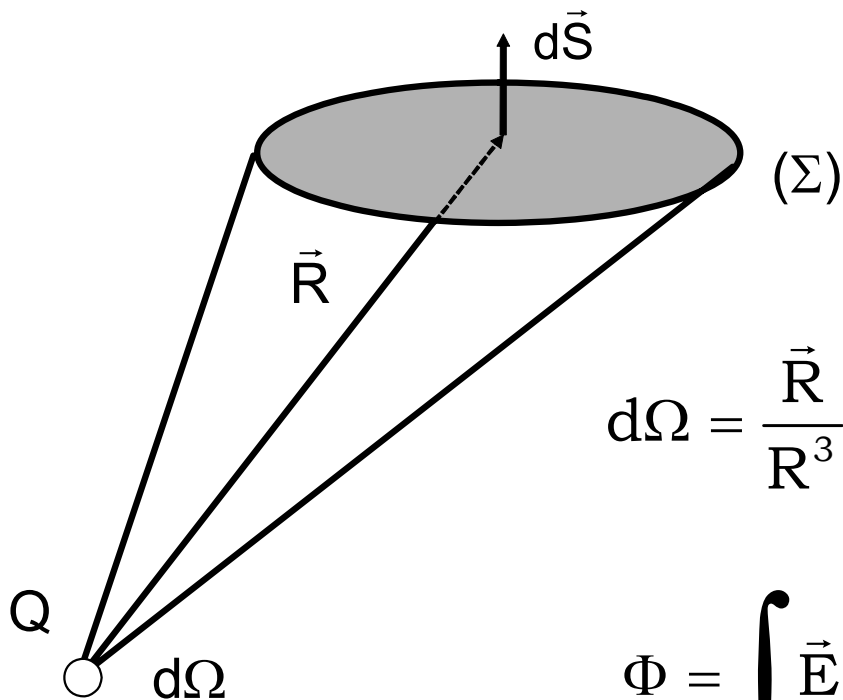
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \longrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y + C_1 \\ \ln x = \ln z + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = K_1 y \\ x = K_2 z \end{cases}$$

$$K_1 = \frac{x_0}{y_0}$$

$$K_2 = \frac{x_0}{z_0}$$



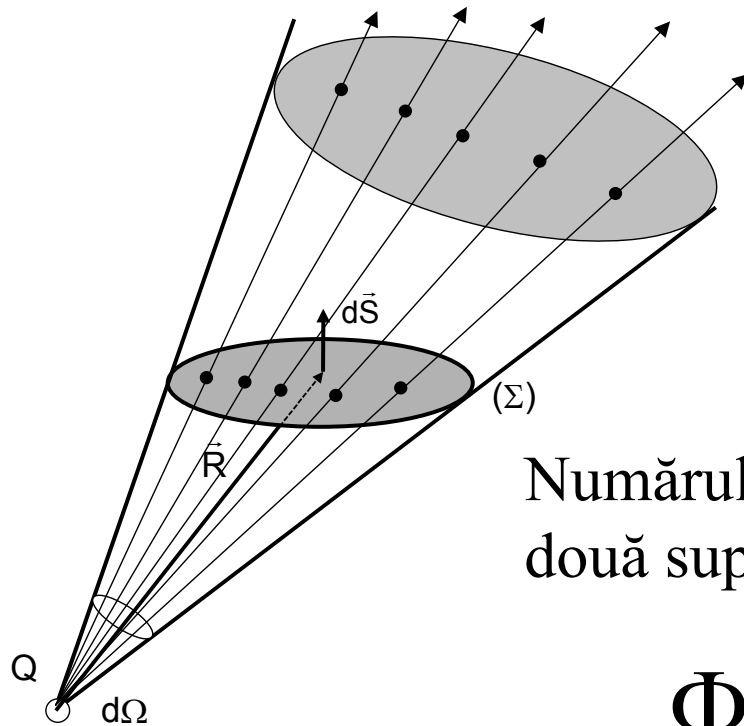
# Fluxul câmpului electric



$$d\Omega = \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \Omega = \int_{(\Sigma)} \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$

# Relația flux-linii de câmp



$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$

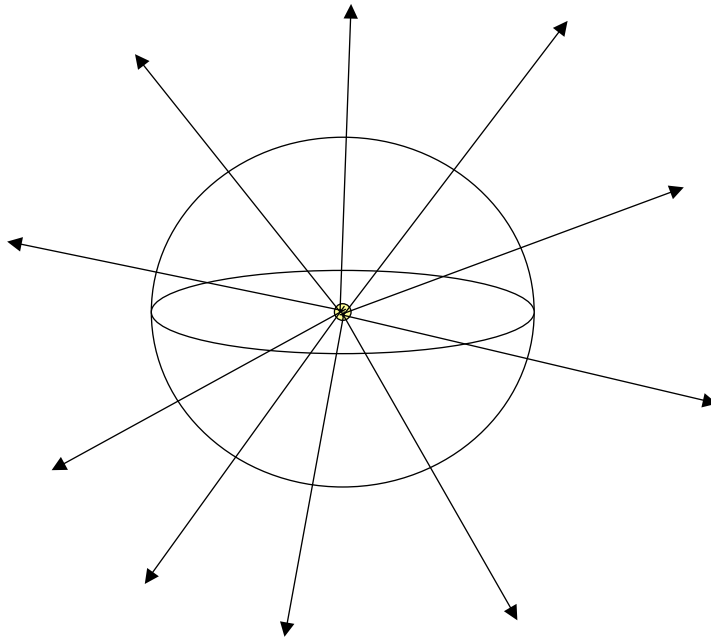
Fluxurile sunt egale prin cele două suprafețe

Numărul de linii de câmp care străbat cele două suprafețe sunt egale

$$\Phi \approx N_{\text{linii de câmp}}$$

# Fluxul

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$

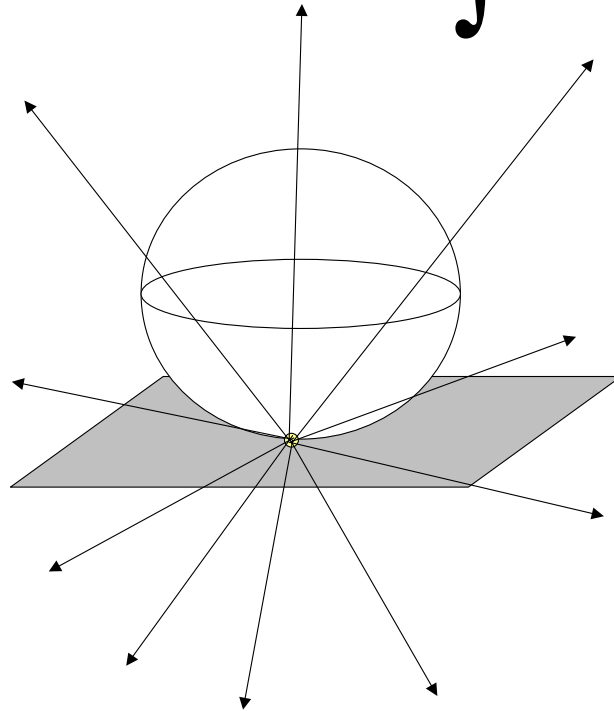


$$\Omega = 4\pi$$

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

# Fluxul

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$



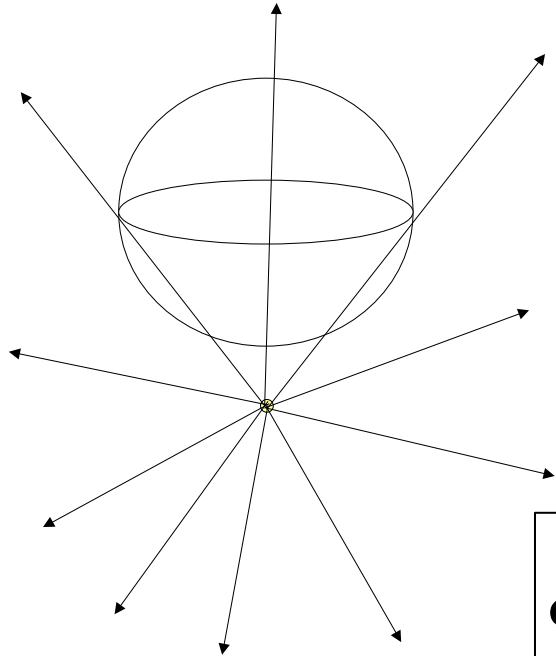
$$\Omega = 2\pi$$



$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}$$



# Fluxul

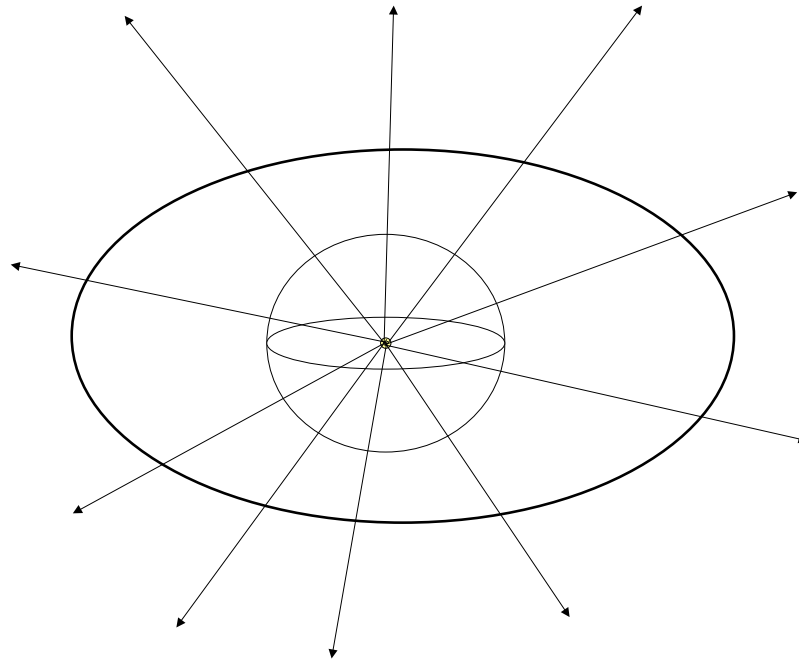


$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R}}{R^3} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$

$$\Omega = 0 \longrightarrow \Phi = 0$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \sum Q_{\text{interior}} + \frac{1}{2} \sum Q_{\text{suprafata}} \right)$$

# Teorema lui Gauss



*Fluxul intensității câmpului electric printr-o suprafață închisă este egal cu suma sarcinilor interioare suprafeței plus semisuma sarcinilor de pe suprafață raportate la  $\epsilon_0$*

# Concluzii

*Observăm că fluxul nu depinde de forma suprafeței. Faptul că el este însă proporțional cu sarcina electrică interioară ne conduce spre interpretarea fluxului printr-o suprafață ca număr de linii de câmp ce trec prin aceasta.*

*Să presupunem că dintr-o sarcină punctuală pozitivă pornesc linii de câmp într-un număr proporțional cu mărimea sa. Numărul de linii de câmp ce trec prin suprafață, dacă aceasta este închisă și include sarcina este același indiferent de forma suprafeței.*

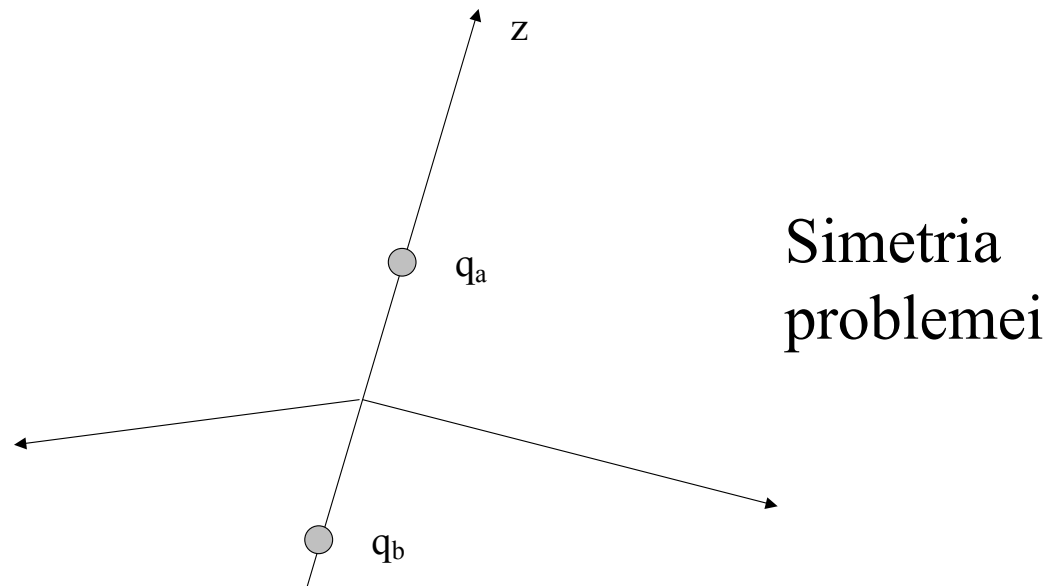
*Pentru a obține în această interpretare fluxul nul în cazul sarcinilor exterioare suprafeței închise trebuie să adoptăm următoarea convenție. Se alege un sens pozitiv de străbatere al suprafeței - în sensul normalei la suprafață în punctul respectiv - adică, la numărul de linii de câmp ce străbat o suprafață se adună numărul de linii de câmp ce formează cu normala la suprafață unghiuri mai mici decât  $90^\circ$  și se scade numărul de linii de câmp ce formează cu normala la suprafață unghiuri mai mari decât  $90^\circ$ .*

# Concluzii

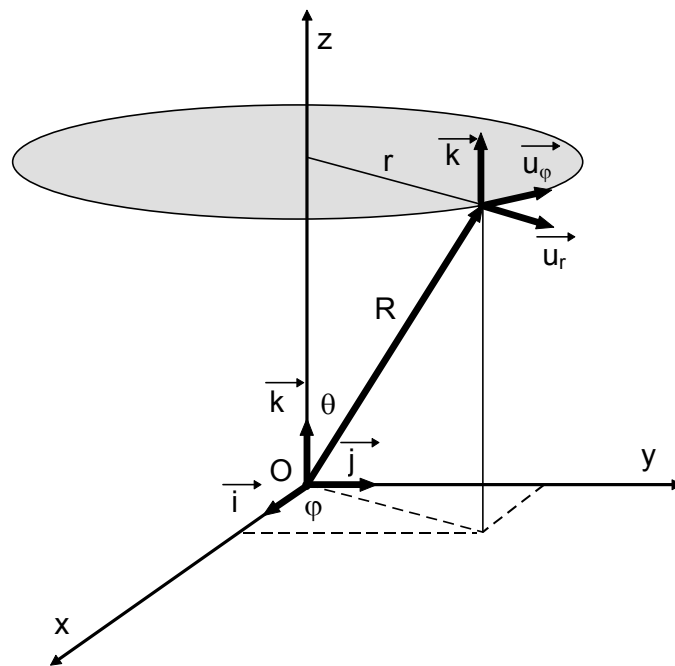
*Dacă fluxul este proporțional cu numărul de linii de câmp ce trec prin suprafață (respectând convenția de mai sus), intensitatea câmpului electric poate fi interpretată ca densitate de linii ce trec prin suprafață.*

Teorema lui Gauss este o consecință directă a dependenței de inversul pătratului distanței a forței electrice (legea lui Coulomb). Utilizând teorema lui Gauss putem demonstra că în interiorul unei distribuții superficiale sferice intensitatea câmpului electric este nulă. Dacă se verifică experimental acest fapt validăm nu numai teorema lui Gauss ci și legea lui Coulomb. De fapt, asemenea verificări au fost făcute cu precizie foarte mare.

# Două sarcini punctuale

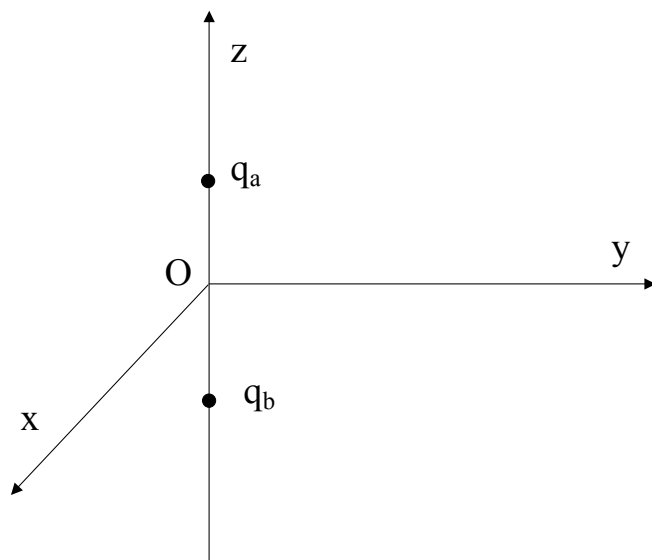


# Două sarcini punctuale



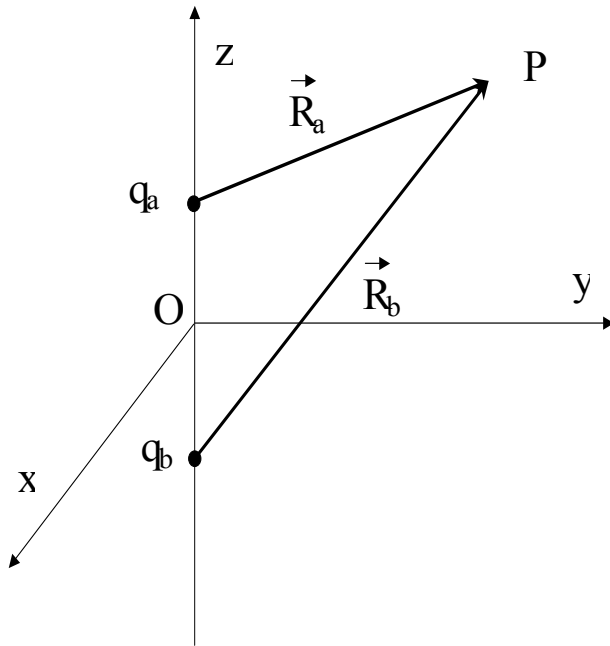
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

# 2 sarcini



Simetrie  
cilindrică  
(axială)

## 2 sarcini



$$\vec{R} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}, R = |\vec{R}|$$

$$\vec{R}_a = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + \left(z_p - \frac{d}{2}\right) \vec{k} = r_p \vec{u}_r + \left(z_p - \frac{d}{2}\right) \vec{k}, R_a = |\vec{R}_a|$$

$$\vec{R}_b = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + \left(z_p + \frac{d}{2}\right) \vec{k} = r_p \vec{u}_r + \left(z_p + \frac{d}{2}\right) \vec{k}, R_b = |\vec{R}_b|$$

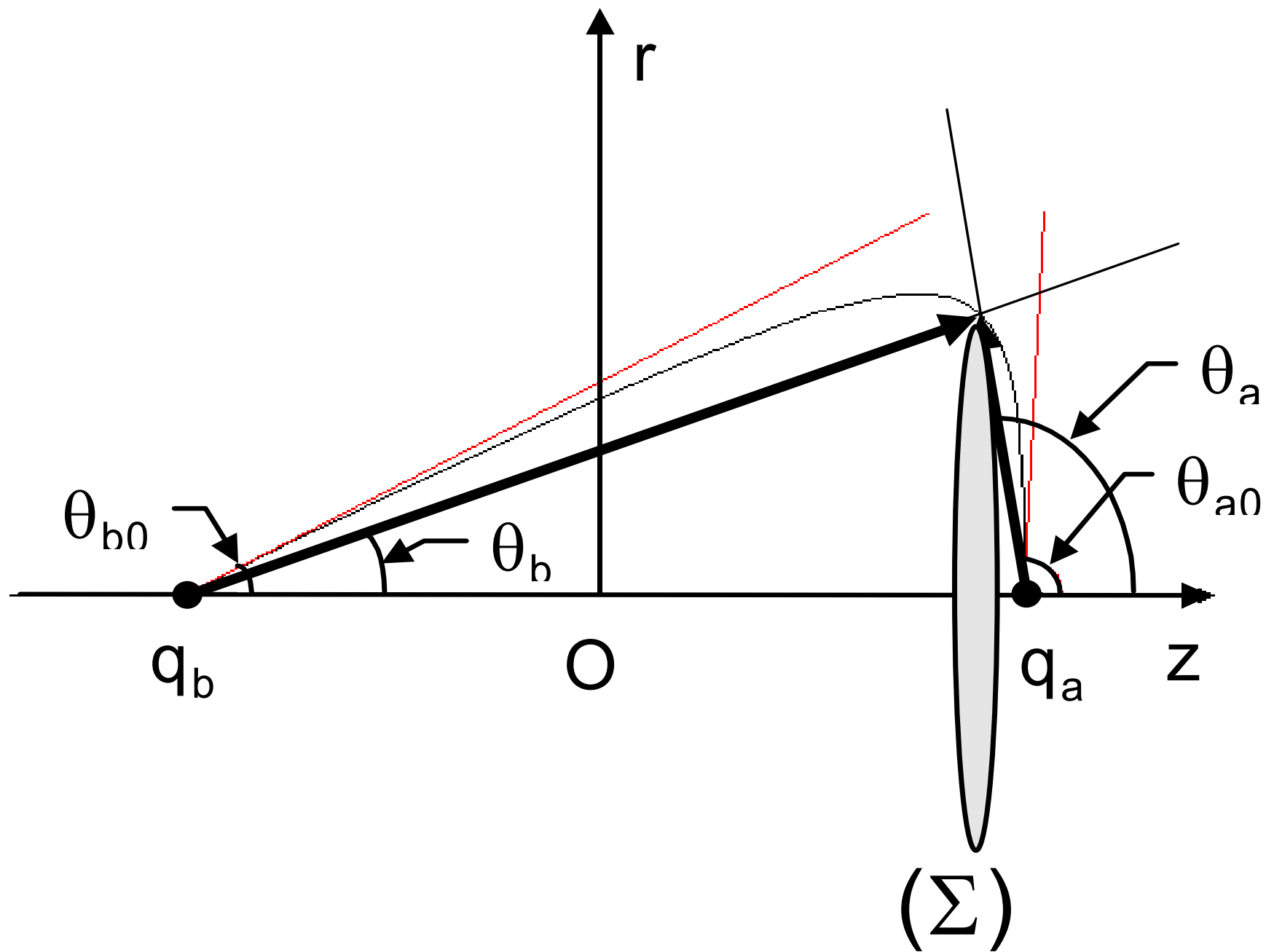
$$V = V_a + V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_a}{R_a} + \frac{q_b}{R_b} \right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_a \frac{\vec{R}_a}{R_a^3} + q_b \frac{\vec{R}_b}{R_b^3} \right)$$



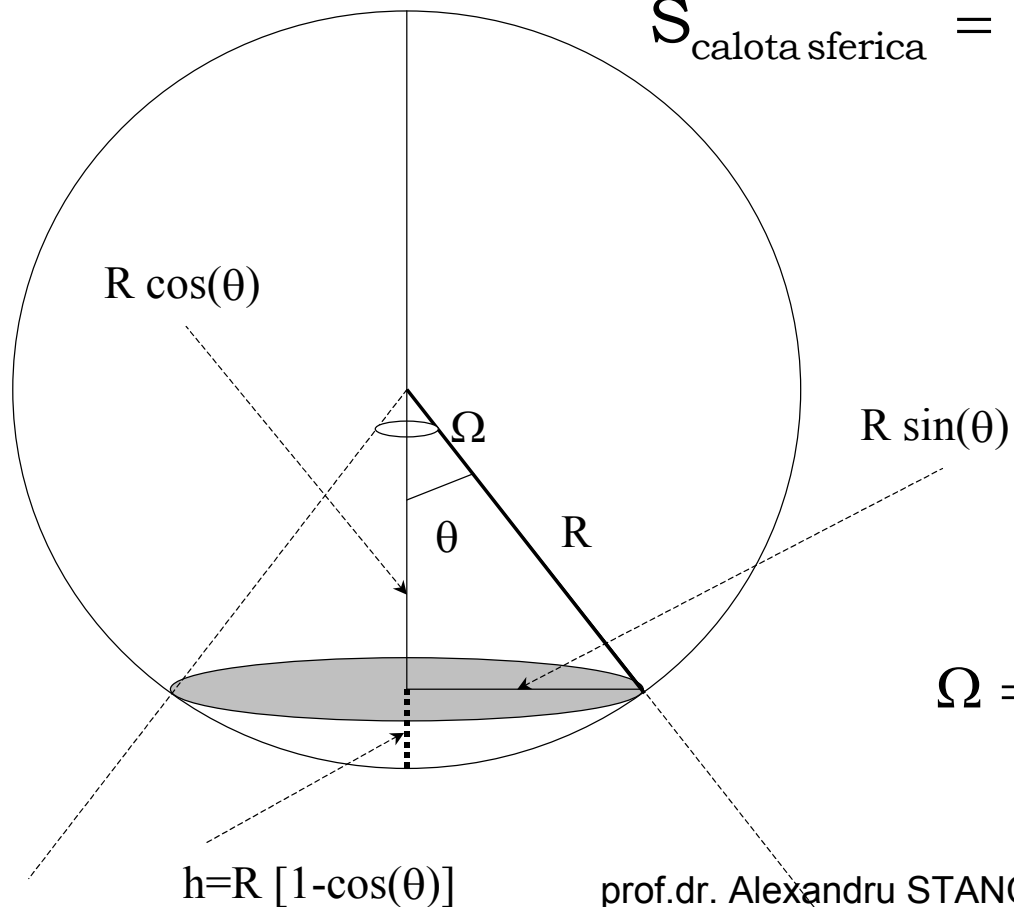
## 2 sarcini

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_a}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q_b}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_a \left[ r_p \vec{u}_r + \left( z_p - \frac{d}{2} \right) \vec{k} \right]}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_b \left[ r_p \vec{u}_r + \left( z_p + \frac{d}{2} \right) \vec{k} \right]}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$



# Unghiul solid

$$S_{\text{calota sferica}} = 2\pi R h = 2\pi R^2 [1 - \cos(\theta)]$$



$$\Omega = \frac{S_{\text{calota sferica}}}{R^2} = 2\pi [1 - \cos(\theta)]$$

$$h = R [1 - \cos(\theta)]$$

## 2 sarcini

$$\Phi_a = -\frac{q_a}{\epsilon_0} \frac{\Omega_a}{4\pi}$$

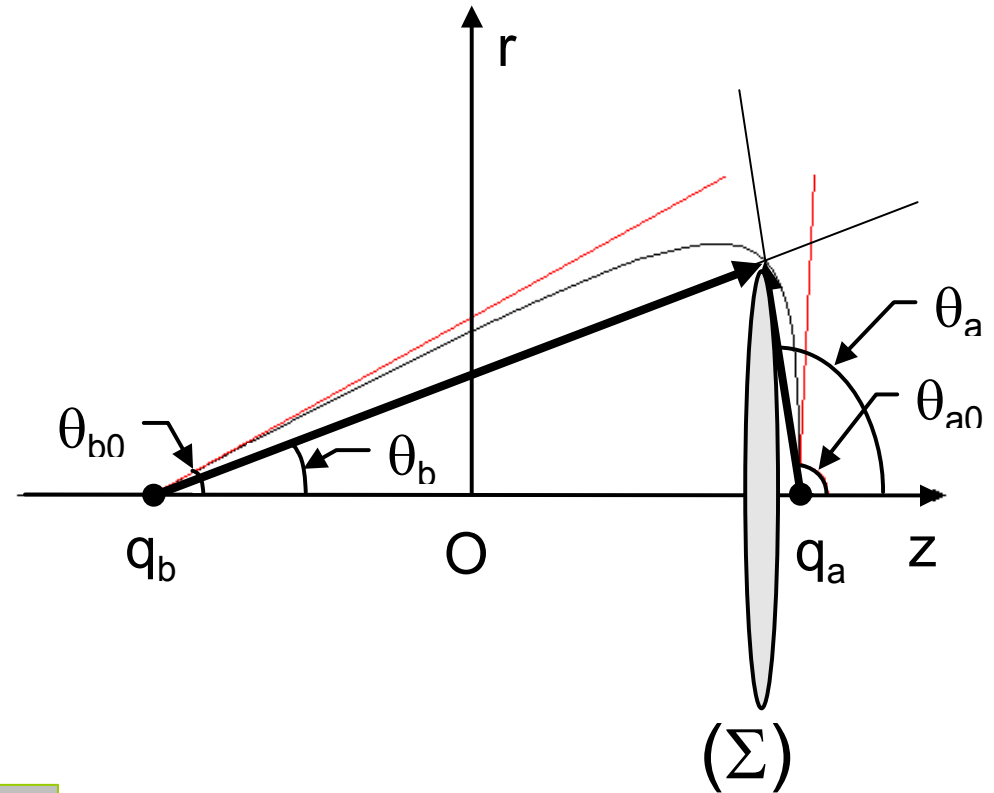
$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b$$

$$\Phi_b = \frac{q_b}{\epsilon_0} \frac{\Omega_b}{4\pi}$$

$$\Omega_a = 2\pi[1 - \cos(\pi - \theta_a)]$$

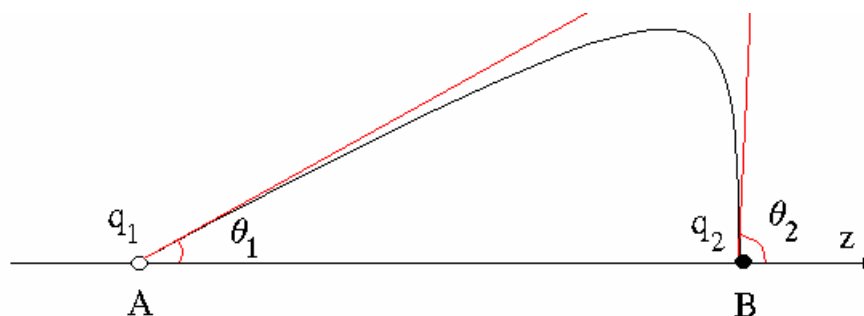
$$\Omega_b = 2\pi(1 - \cos \theta_b)$$

$$q_a \cos \theta_a + q_b \cos \theta_b = C$$



# Problemă

Fie  $q_1$  și  $q_2$  două sarcini electrice punctiforme de semne contrare. Din A pornește o linie de câmp ce formează cu dreapta ce unește sarcinile unghiul  $\theta_1$ . Să se calculeze unghiul  $\theta_2$  pe care îl va face această linie de câmp cu dreapta AB în punctul B. Sub ce unghi minim  $\theta_0$  pleacă din A o linie de câmp care nu ajunge în B? Ce unghi va face această linie de câmp cu axa Oz la infinit?



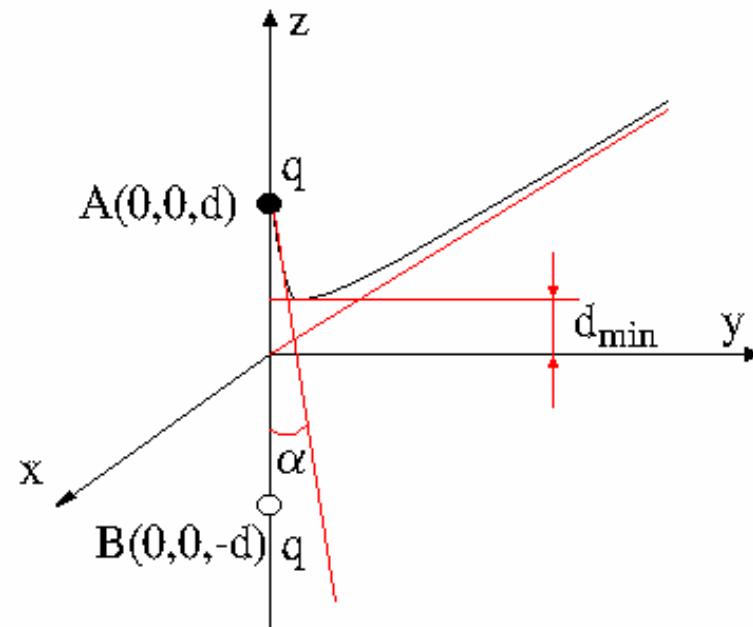
# Problemă

Două sarcini punctiforme identice de mărime  $q$  se află la distanța  $2d$ .

Cât de mult se va apropia linia de câmp ce formează la plecarea din sarcina  $q$  unghiul  $\alpha$  cu dreapta ce unește sarcinile pe planul de simetrie ( $d_{\min}$ ).

Calculați unghiul dintre linia de câmp și planul de simetrie al sistemului departe de sarcini, în funcție de  $d$ .

Pentru puncte situate departe de sistem calculați intensitatea câmpului electric și potențialul.



# Suprafețe echipotențiale

$$\frac{q_a}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q_b}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = 4\pi\epsilon_o V_o \quad n = \frac{q_a}{q_b}$$

$$n \frac{1}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{4\pi\epsilon_o V_o}{q_b}$$

$$n = -|n| \quad |n| \frac{1}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$V_o = 0$$

# Suprafețe echipotențiale

$$r_p^2 + z_p^2 + \frac{d^2}{4} + z_p d \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} = 0 \quad \text{pentru } n \neq 1$$

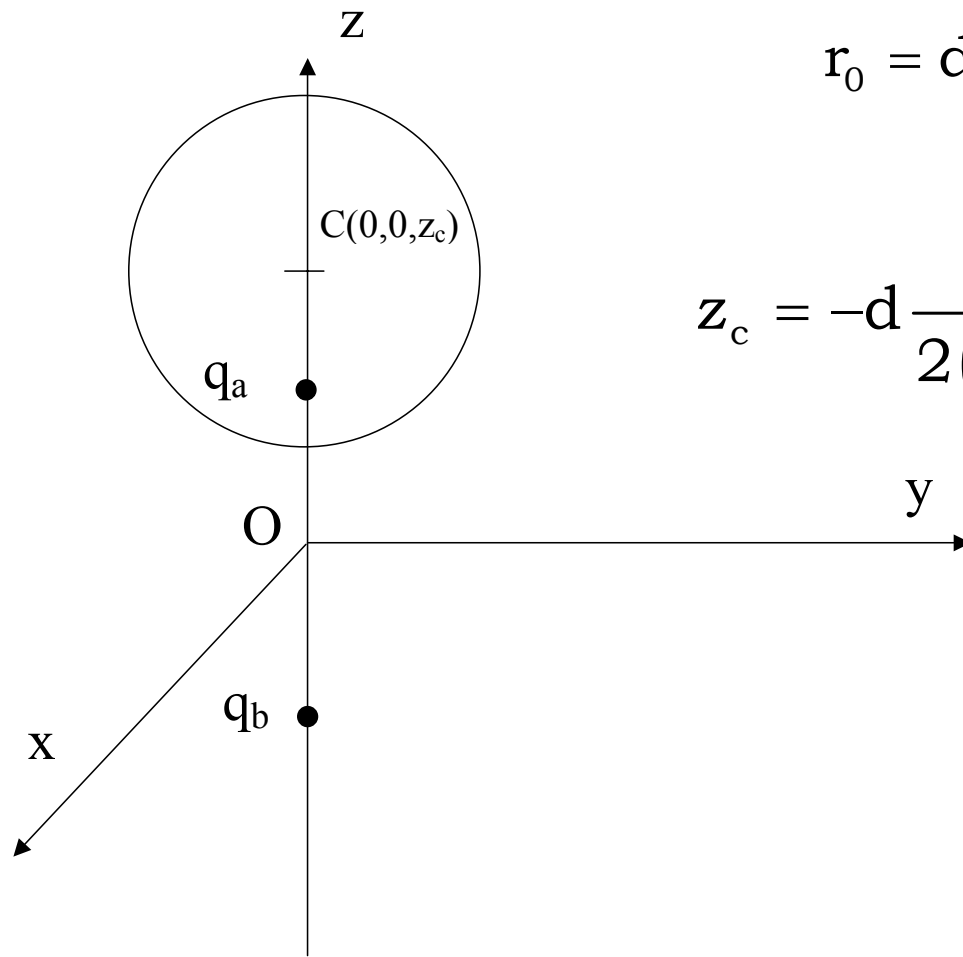
$$r_p^2 + (z_p - z_c)^2 = r_o^2$$

$$z_c = -d \frac{n^2 + 1}{2(n^2 - 1)} \quad r_o = d \frac{n}{|n^2 - 1|}$$

Se observă că suprafața echipotențială sferică  $V_0=0$  înconjoară sarcina în modul mai mică.



# Suprafețe echipotențiale



$$r_0 = d \frac{n}{|n^2 - 1|}$$

$$z_c = -d \frac{n^2 + 1}{2(n^2 - 1)} > 0 \text{ dacă } |n| < 1$$

$$|n| = \frac{q_a}{q_b} < 1$$

# Distribuții continue

- **Distribuții liniare**

- Segment liniar, inel circular

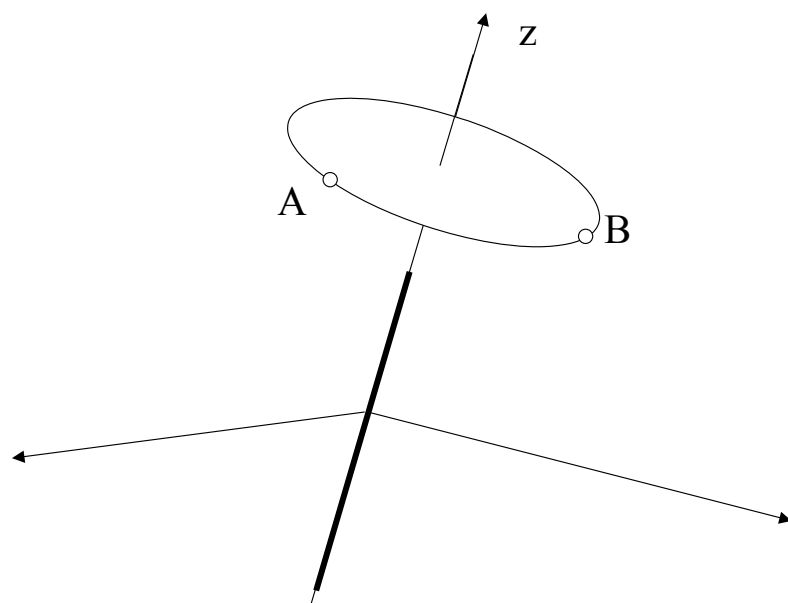
- **Distribuții superficiale**

- Disc, plan, sferă,

- **Distribuții volumice**

- Sferă

# Distribuții liniare



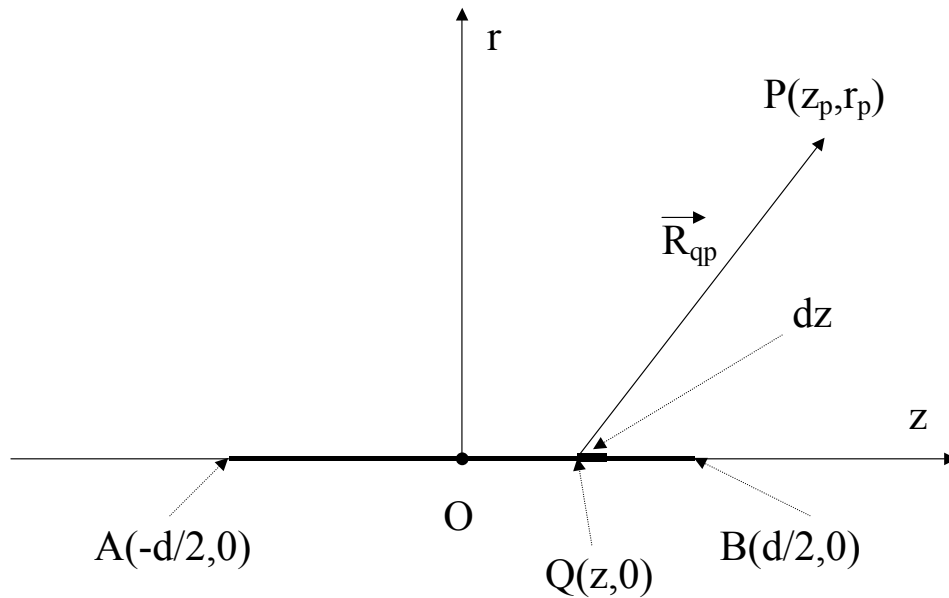
Simetrie axială!

# Segment

$$\vec{R}_{qp} = (z_p - z)\vec{k} + r_p\vec{u}_r$$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\vec{R}_{qp}}{R_{qp}^3} \lambda dz$$

dq  
↓



# Segment

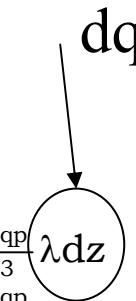
$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \left[ (z_p - z) \vec{k} + r_p \vec{u}_r \right] \frac{\lambda dz}{\left[ (z_p - z)^2 + r_p^2 \right]^{3/2}}$$

$$E_{pr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{r_p \lambda dz}{\left[ (z_p - z)^2 + r_p^2 \right]^{3/2}}$$

$$E_{pz} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{(z_p - z) \lambda dz}{\left[ (z_p - z)^2 + r_p^2 \right]^{3/2}}$$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\vec{R}_{qp}}{R_{qp}^3} \lambda dz$$

$dq$



$$\vec{R}_{qp} = (z_p - z) \vec{k} + r_p \vec{u}_r$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2 \sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

$$\int \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

# Segment

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2 \sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

$$\begin{aligned}
 E_{pr} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{r_p \lambda dz}{\left[ (z_p - z)^2 + r_p^2 \right]^{3/2}} = \frac{r_p \lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{d(z - z_p)}{\left[ (z - z_p)^2 + r_p^2 \right]^{3/2}} = \\
 &= \frac{r_p \lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - z_p)}{r_p^2 \sqrt{\left[ (z - z_p)^2 + r_p^2 \right]}} \Bigg|_{-d/2}^{d/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ \frac{\left( \frac{d}{2} - z_p \right)}{\sqrt{\left[ \left( \frac{d}{2} - z_p \right)^2 + r_p^2 \right]}} - \frac{\left( -\frac{d}{2} - z_p \right)}{\sqrt{\left[ \left( -\frac{d}{2} - z_p \right)^2 + r_p^2 \right]}} \right\} = \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ \frac{\left( z_p + \frac{d}{2} \right)}{\sqrt{\left[ \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 + r_p^2 \right]}} - \frac{\left( z_p - \frac{d}{2} \right)}{\sqrt{\left[ \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 + r_p^2 \right]}} \right\}
 \end{aligned}$$

# Segment

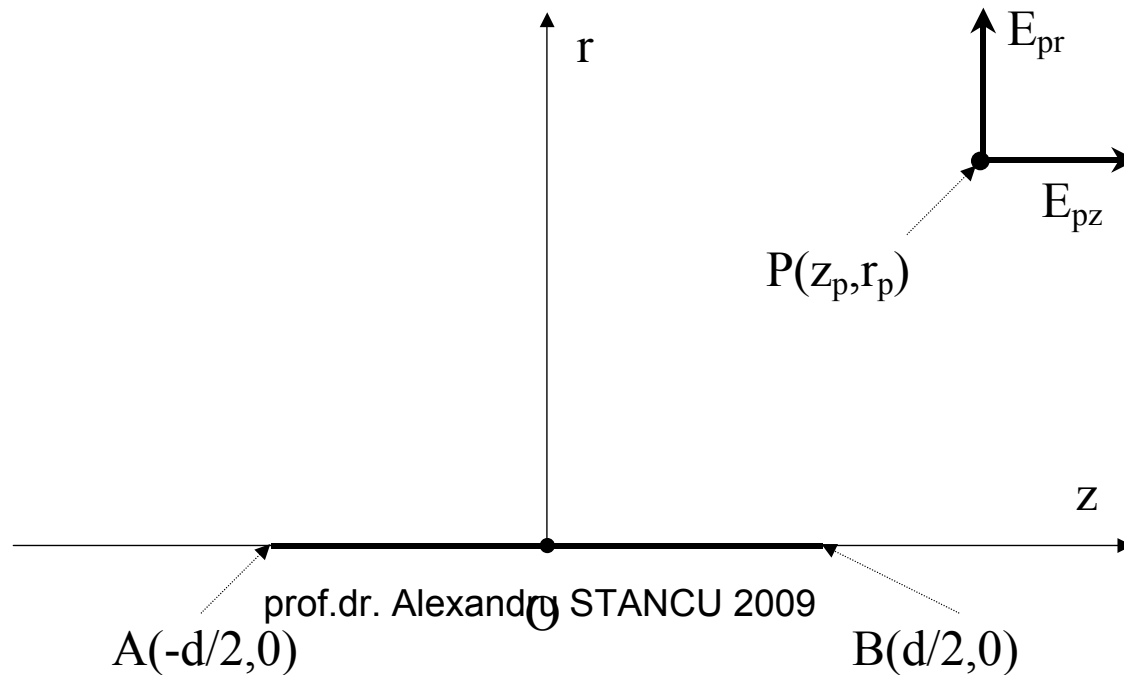
$$\int \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

$$\begin{aligned}
 E_{pz} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{(z_p - z)\lambda dz}{\left[(z_p - z)^2 + r_p^2\right]^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{(z - z_p)d(z - z_p)}{\left[(z - z_p)^2 + r_p^2\right]^{3/2}} = \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\left[(z - z_p)^2 + r_p^2\right]}} \Bigg|_{-d/2}^{d/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ \frac{r_p}{\sqrt{\left[\left(\frac{d}{2} - z_p\right)^2 + r_p^2\right]}} - \frac{r_p}{\sqrt{\left[\left(-\frac{d}{2} - z_p\right)^2 + r_p^2\right]}} \right\} = \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ \frac{r_p}{\sqrt{\left[\left(z_p - \frac{d}{2}\right)^2 + r_p^2\right]}} - \frac{r_p}{\sqrt{\left[\left(z_p + \frac{d}{2}\right)^2 + r_p^2\right]}} \right\}
 \end{aligned}$$

# Câmpul total

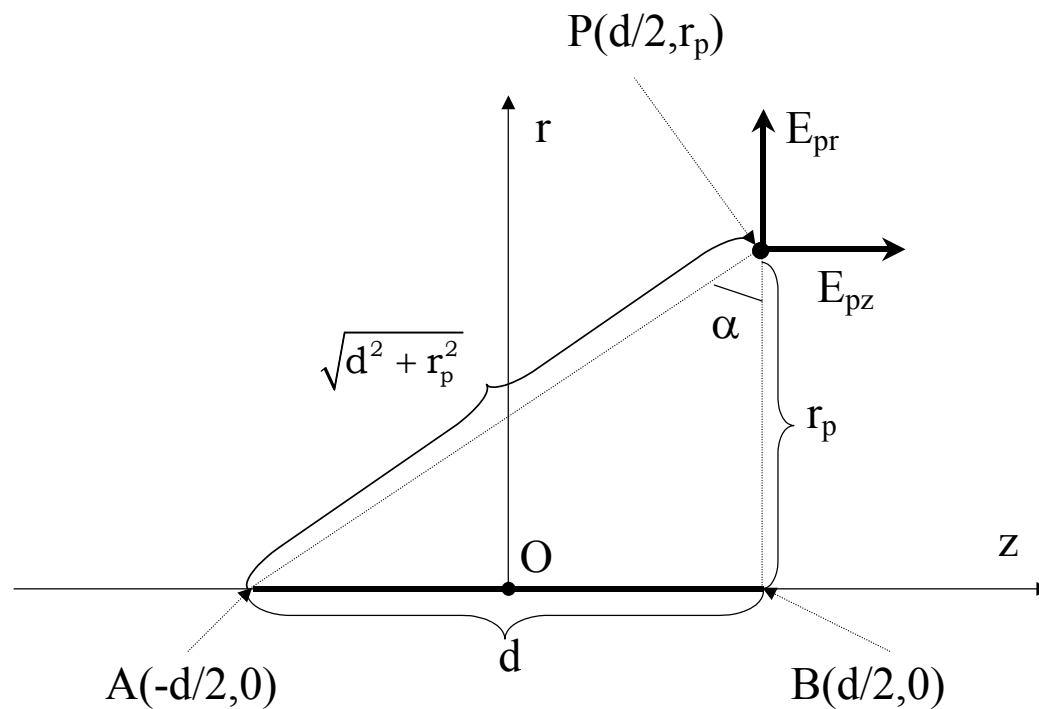
$$E_{pr} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ \frac{\left(z_p + \frac{d}{2}\right)}{\sqrt{\left[\left(z_p + \frac{d}{2}\right)^2 + r_p^2\right]}} - \frac{\left(z_p - \frac{d}{2}\right)}{\sqrt{\left[\left(z_p - \frac{d}{2}\right)^2 + r_p^2\right]}} \right\}$$

$$E_{pz} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ \frac{r_p}{\sqrt{\left[\left(z_p - \frac{d}{2}\right)^2 + r_p^2\right]}} - \frac{r_p}{\sqrt{\left[\left(z_p + \frac{d}{2}\right)^2 + r_p^2\right]}} \right\}$$





# Formulă simplificată



$$z_p = \frac{d}{2}$$

$$E_{pr} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \frac{d}{\sqrt{d^2 + r_p^2}}$$

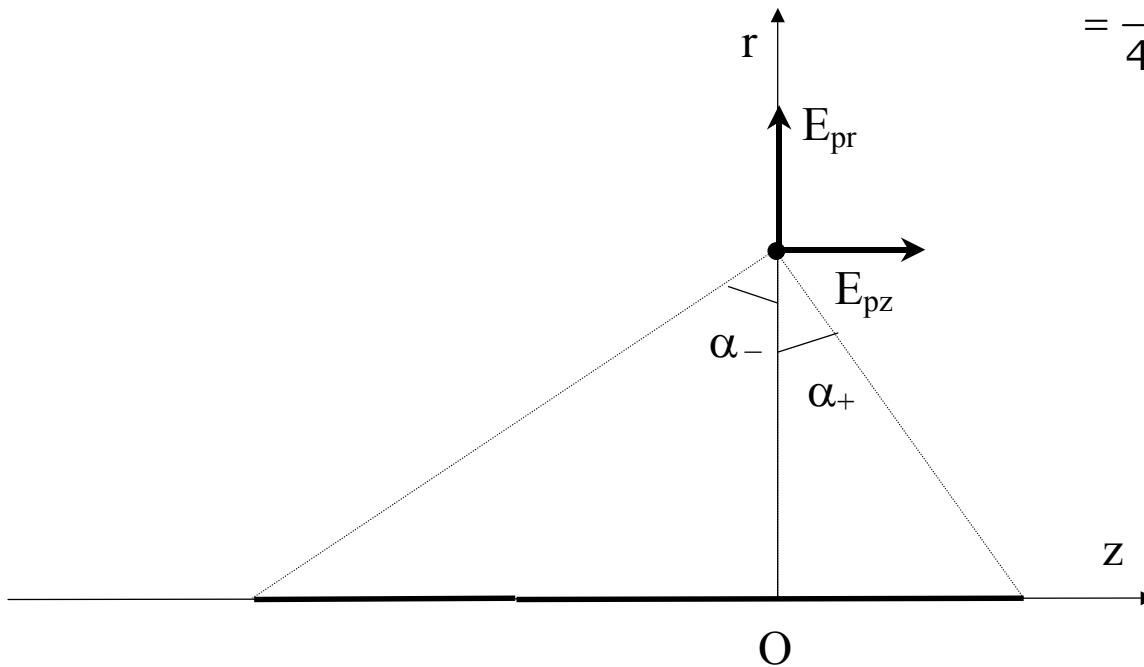
$$E_{pz} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \left\{ 1 - \frac{r_p}{\sqrt{d^2 + r_p^2}} \right\}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{r_p}{\sqrt{d^2 + r_p^2}} \quad \sin(\alpha) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + r_p^2}}$$

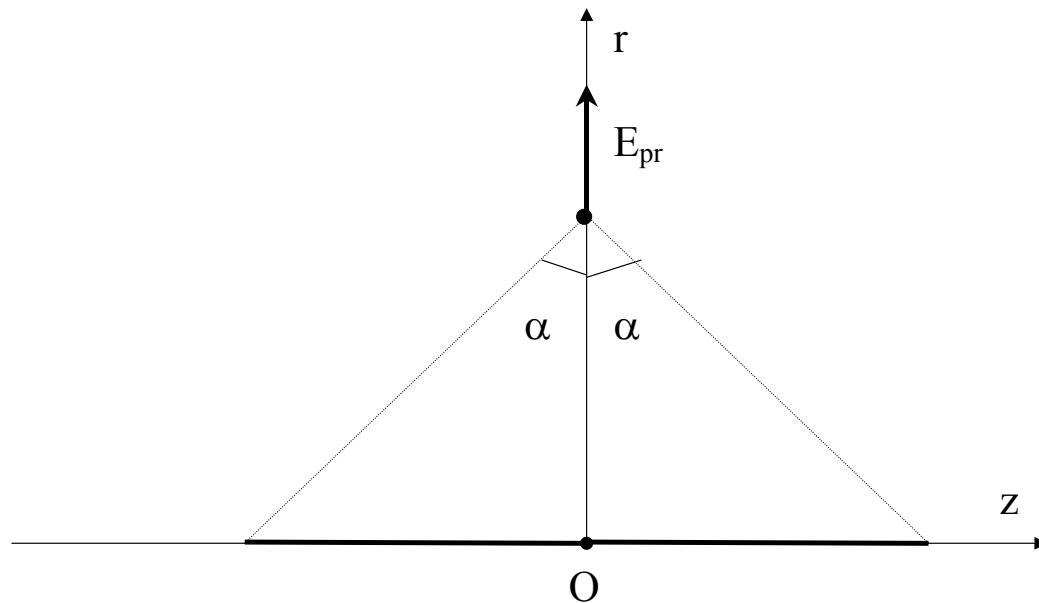
# Formulă simplificată

$$E_{pr} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} [\sin(\alpha_+) + \sin(\alpha_-)] \quad E_{pz} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} \{ [1 - \cos(\alpha_-)] - [1 - \cos(\alpha_+)] \} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} [\cos(\alpha_+) - \cos(\alpha_-)]$$



# Cazul simetric



$$E_{pr} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_p} 2\sin(\alpha)$$

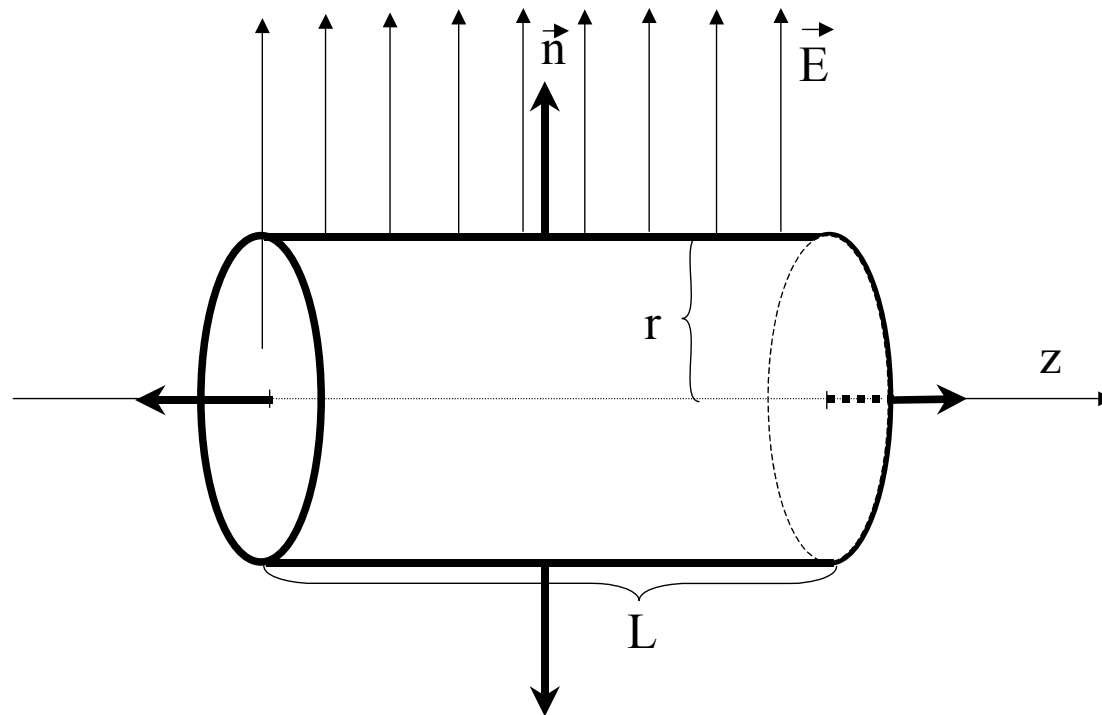
$$E_{pz} = 0$$

$$E_{pr} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_p}$$

Fir infinit

$$\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

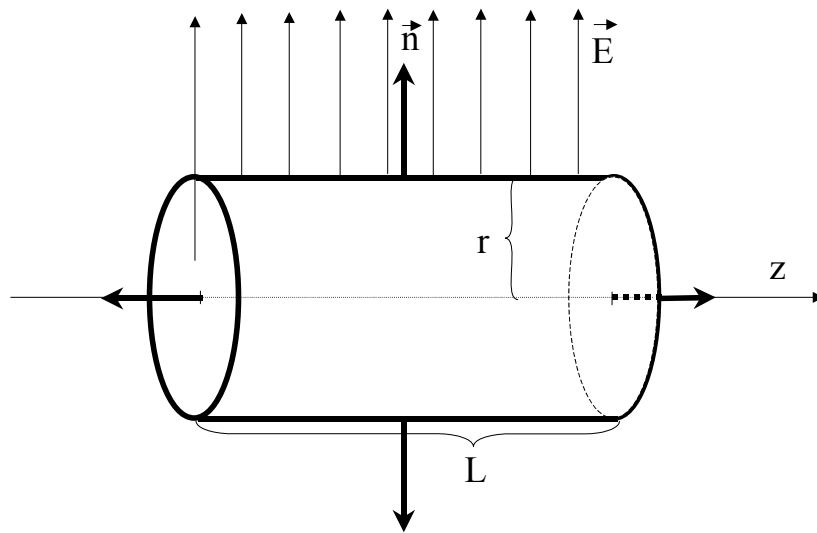
# Cazul simetric (distribuție liniară infinită)



# Cazul simetric (distribuție liniară infinită)

$$\Phi = 2\pi r L E_r = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_p}$$



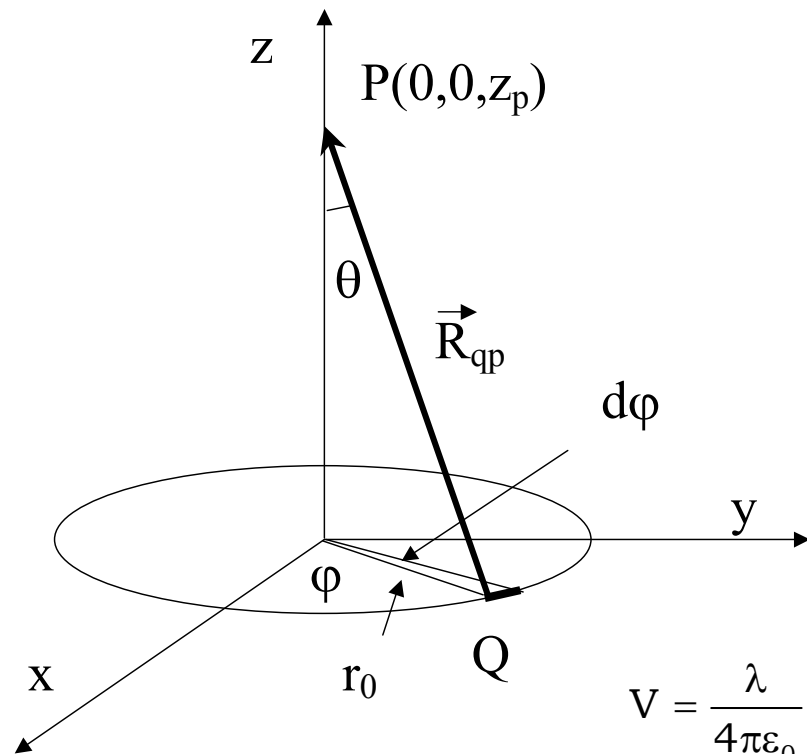
$$E_r = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

$$r = r_0, V = 0 \Rightarrow C = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$$

# Inel



$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 d\phi}{R_{qp}}$$

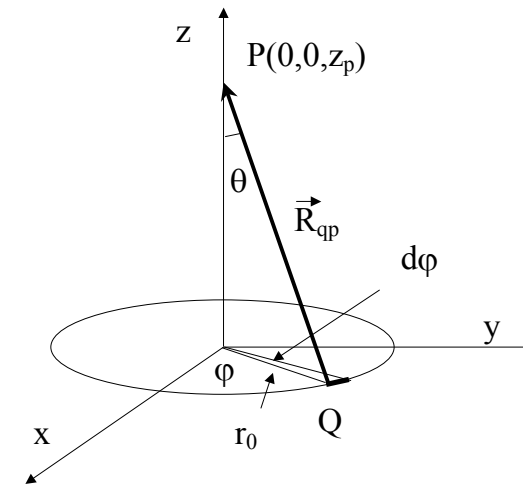
$$R_{qp} = \sqrt{r_0^2 + z_p^2}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0}{R_{qp}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0}{R_{qp}} 2\pi = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}}$$

# Calculul câmpului electric pe axa inelului

$$V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}}$$

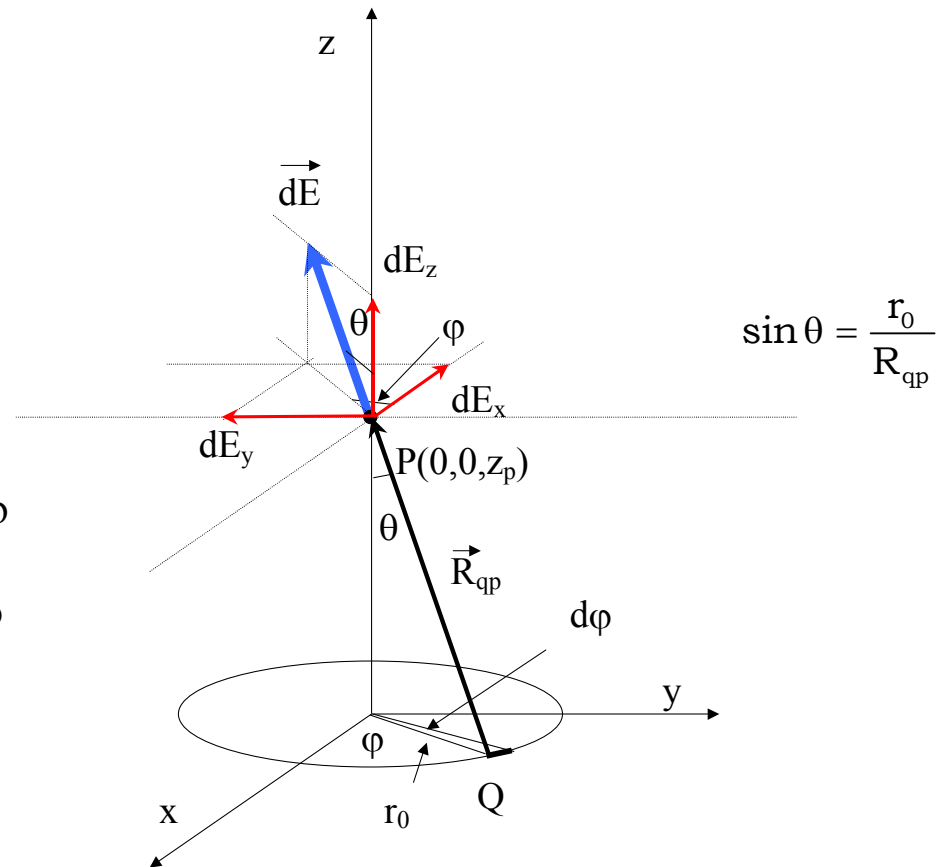
$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z_p} = -\frac{\lambda}{2\epsilon_0} r_0 \left( -\frac{1}{2} \right) (r_0^2 + z_p^2)^{-3/2} 2z_p = \\ &= \frac{\lambda}{2\epsilon_0 r_0} \frac{r_0^2 z_p}{(r_0^2 + z_p^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 r_0} \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned}$$



# Calcul prin integrare

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 d\varphi}{R_{qp}^2}$$

$$\begin{cases} dE_x = -dE \sin \theta \cos \varphi \\ dE_y = -dE \sin \theta \sin \varphi \\ dE_z = dE \cos \theta \end{cases}$$





# Rezultate din integrare

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 \sin \theta}{R_{qp}^2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 \sin \theta}{R_{qp}^2} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$$

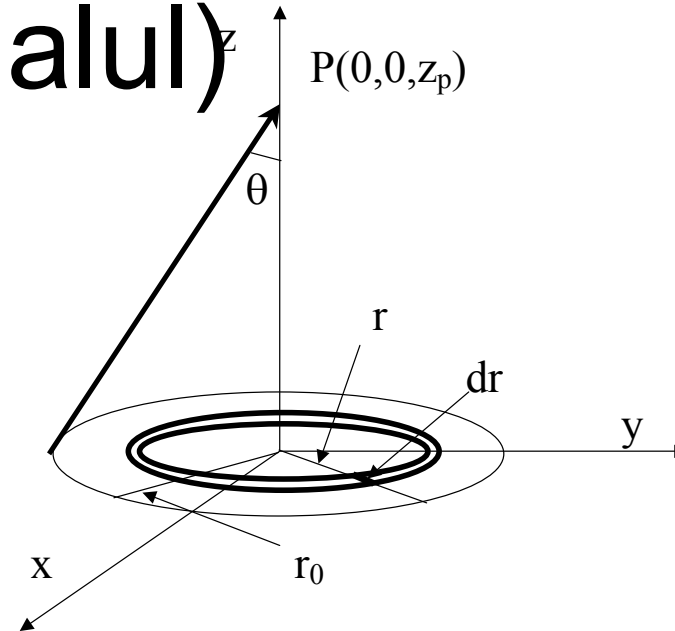
$$E_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 \cos \theta}{R_{qp}^2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\lambda}{2\epsilon_0 r_0} \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dE_x = -dE \sin \theta \cos \varphi \\ dE_y = -dE \sin \theta \sin \varphi \\ dE_z = dE \cos \theta \end{array} \right.$$



# Disc încărcat uniform (potențialul)

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + z_p^2}}$$

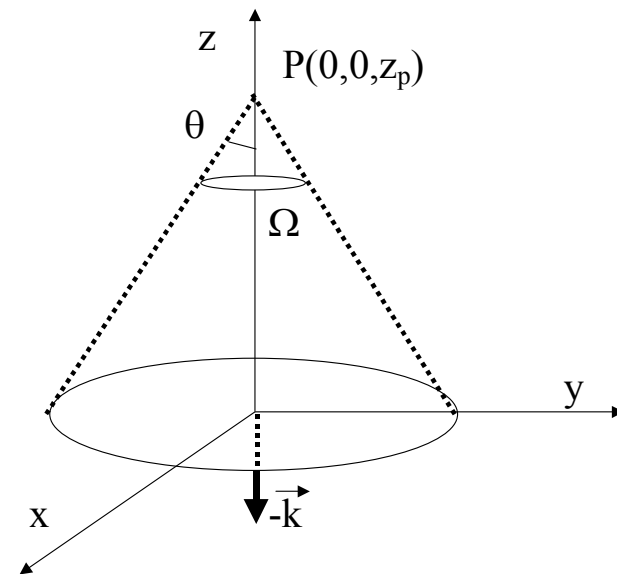


$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z_p^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{r_0} d\left(\sqrt{r^2 + z_p^2}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \sqrt{r_0^2 + z_p^2} - |z_p| \right] = \\ &= \frac{\sigma \pi r_0^2}{2\pi \epsilon_0 r_0^2} \left[ \sqrt{r_0^2 + z_p^2} - |z_p| \right] = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r_0^2} \left[ \sqrt{r_0^2 + z_p^2} - |z_p| \right] \end{aligned}$$

# Disc (câmpul electric pe axă)

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z_p} = -\frac{\partial}{\partial z_p} \left\{ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[ \sqrt{r_0^2 + z_p^2} - |z_p| \right] \right\} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[ \frac{|z_p|}{z_p} - \frac{z_p}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}} \right]$$

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[ \frac{|z_p|}{z_p} - \frac{z_p}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}} \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \frac{|z_p|}{z_p} - \frac{z_p}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}} \right] = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[ \frac{|z_p|}{z_p} - \frac{z_p}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}} \right] = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[ \frac{|z_p|}{z_p} - \cos\theta \right] = \\ &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi} \end{aligned}$$

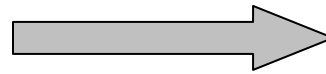


# Cazuri particulare

$$E_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{\Omega}{4\pi}$$

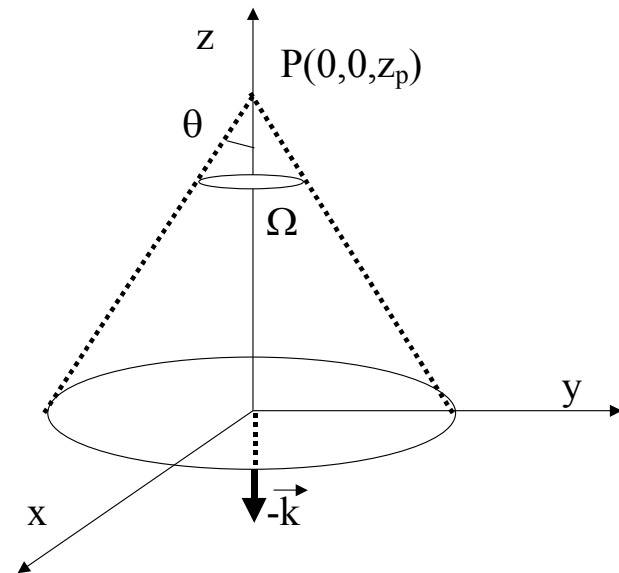
Când raza tinde la infinit sau  
când distanța față de disc  
tinde la zero

$$\Omega \rightarrow 2\pi$$



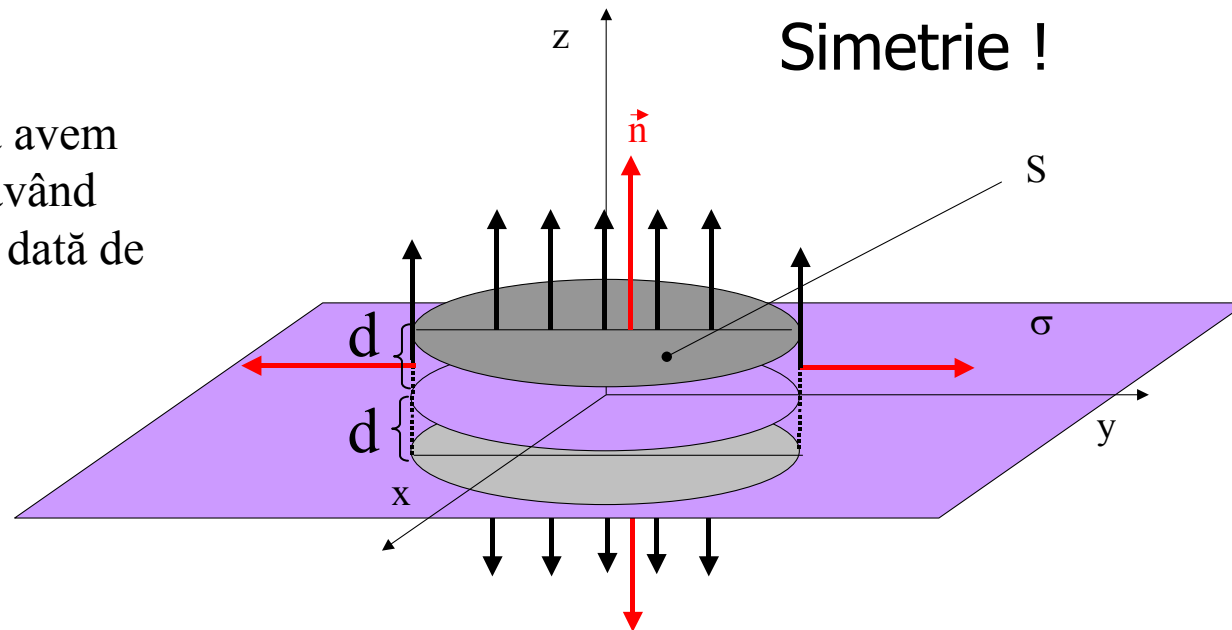
$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

prof.dr. Alexandru STANCU 2009



# Planul infinit (suprafață Gauss)

Datorită simetriei rezultă că avem doar câmp normal la plan, având aceeași valoare la o distanță dată de acesta



$$\Phi_{\text{total}} = 2\Phi_{\text{baza}} + \Phi_{\text{supr.laterală}} = 2E_z S$$

$$\Phi_{\text{baza}} = E_z S$$

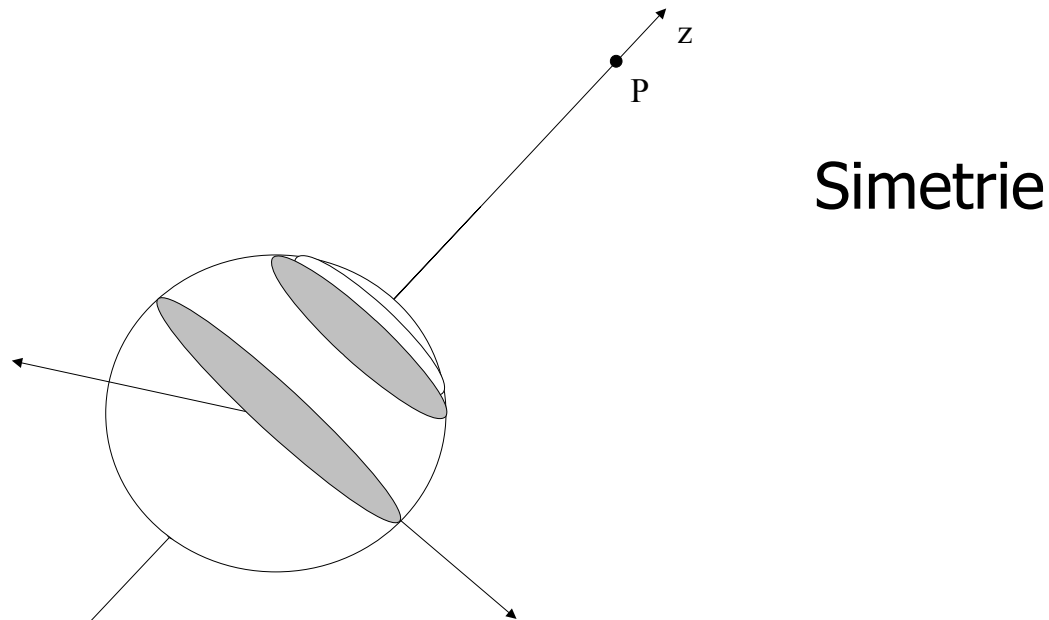
$$\Phi_{\text{supr.laterală}} = 0$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

prof. dr. Alexandru STANCU 2009

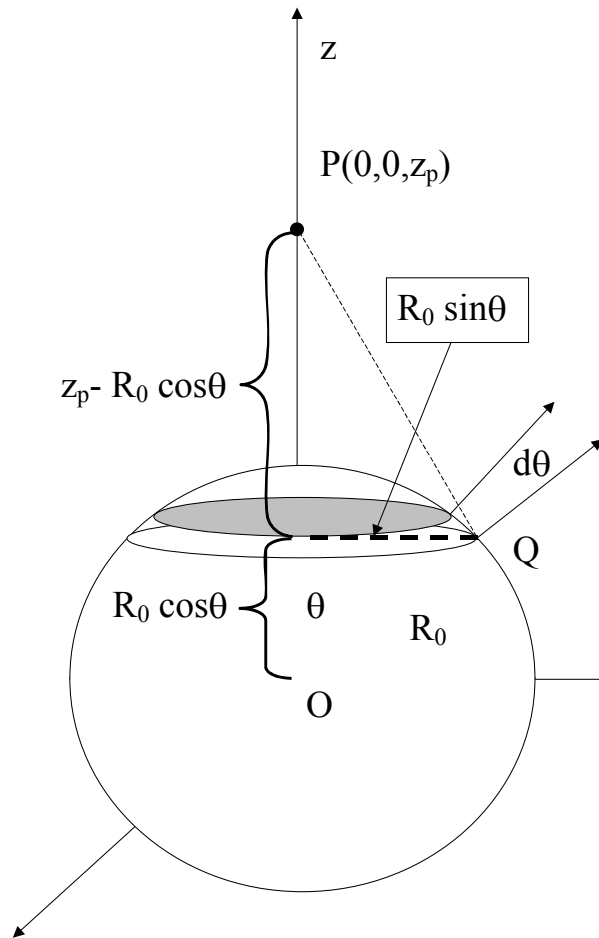
$$\Phi_{\text{total}} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

# Distribuție sferică superficială



Film Câmpul sarcinilor distribuite sferic

# Calcul prin integrare (exemplu)



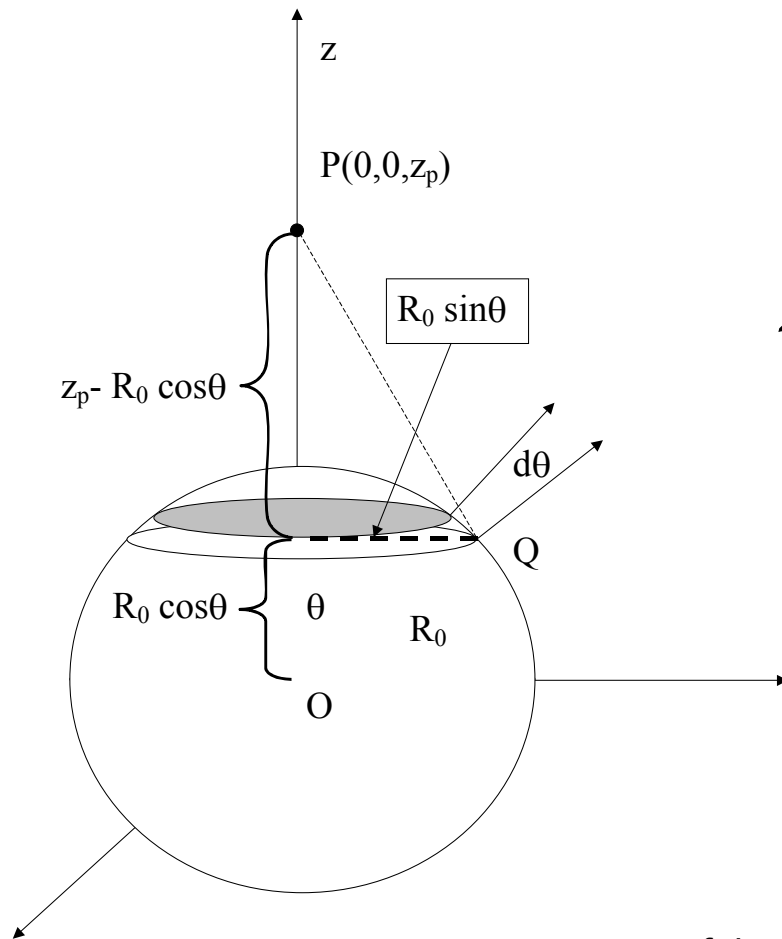
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R_0 \sin \theta) R_0 d\theta}{\sqrt{z_p^2 + R_0^2 - 2z_p R_0 \cos \theta}}$$

$$t^2 = z_p^2 + R_0^2 - 2z_p R_0 \cos \theta$$

$$2t dt = 2z_p R_0 \sin \theta d\theta$$

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R_0^2}{R_0 z_p} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R_0}{z_p} (t_{\max} - t_{\min})$$

# Calcul (continua)



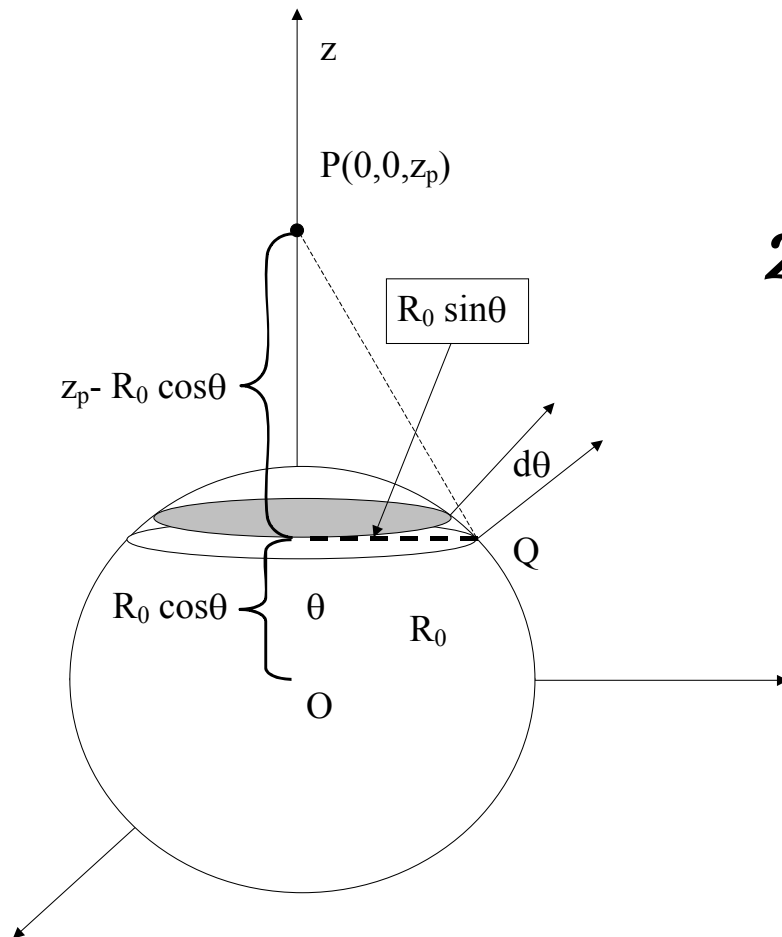
A) Punct în exterior

$$z_p > R_0 \quad \begin{aligned} t_{\min} &= z_p - R_0 \\ t_{\max} &= z_p + R_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R_0}{z_p} (t_{\max} - t_{\min}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R_0}{z_p} 2R_0 = \\ &= \frac{\sigma(4\pi R_0^2)}{4\pi\epsilon_0 z_p} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z_p} \end{aligned}$$



# Calcul (continua)



B) Punct în interior

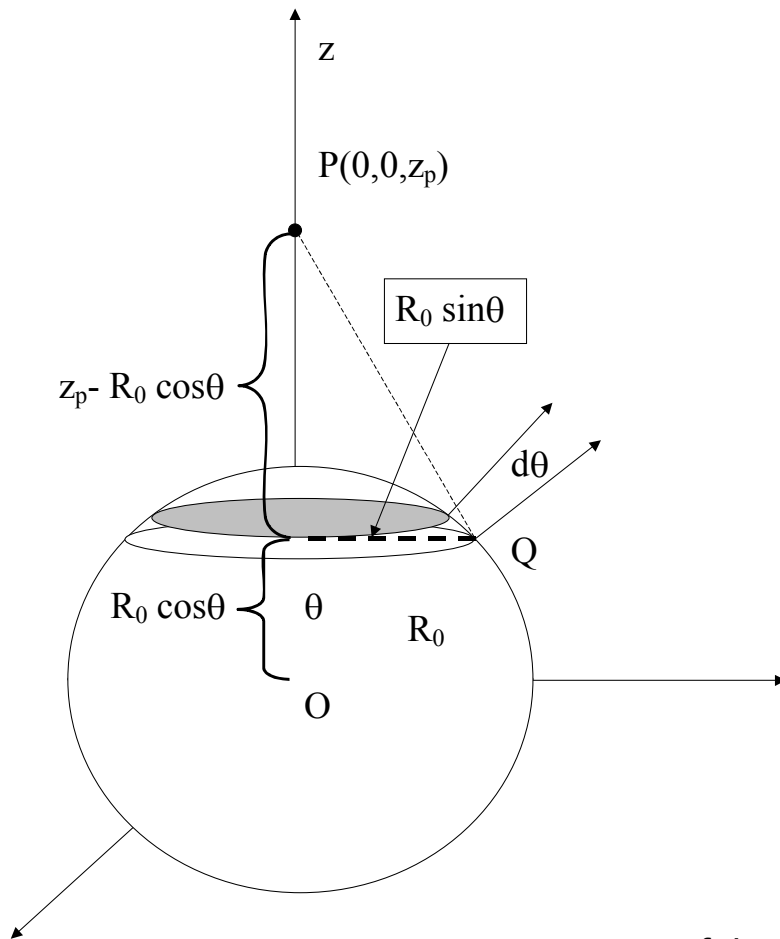
$$z_p < R_0 \quad t_{\min} = R_0 - z_p$$

$$t_{\max} = R_0 + z_p$$

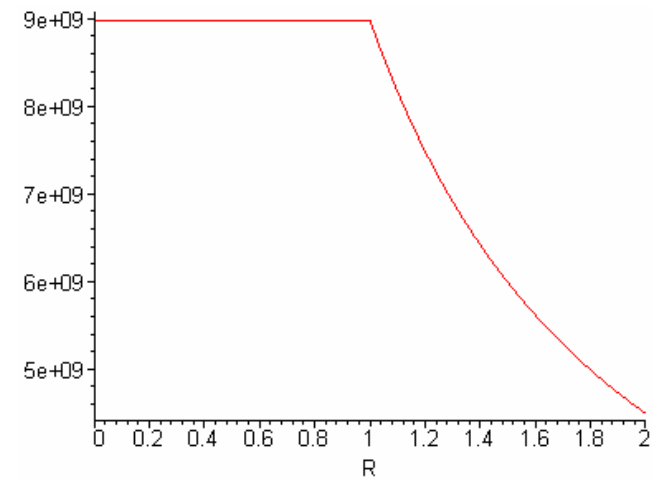
$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R_0}{z_p} (t_{\max} - t_{\min}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R_0}{z_p} 2z_p =$$

$$= \frac{\sigma(4\pi R_0^2)}{4\pi\epsilon_0 R_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

# Rezultat

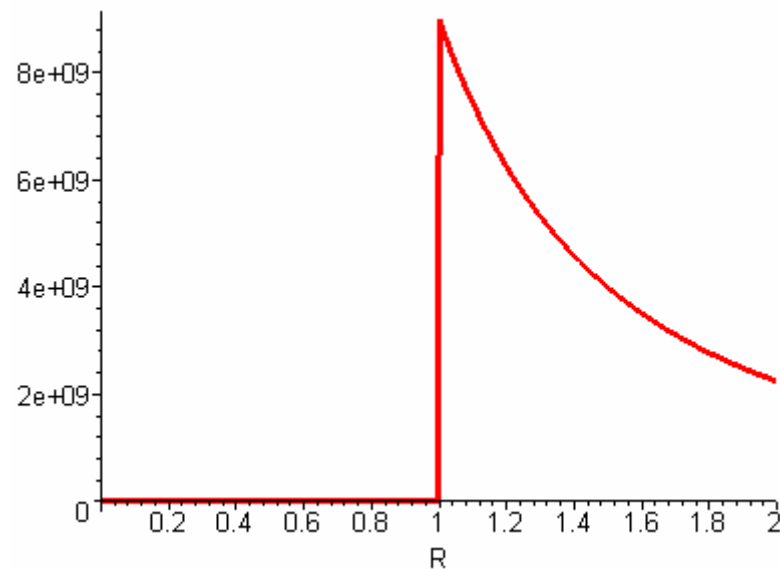


$$V(R) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} & \text{ptr. } R \leq R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{ptr. } R > R_0 \end{cases}$$

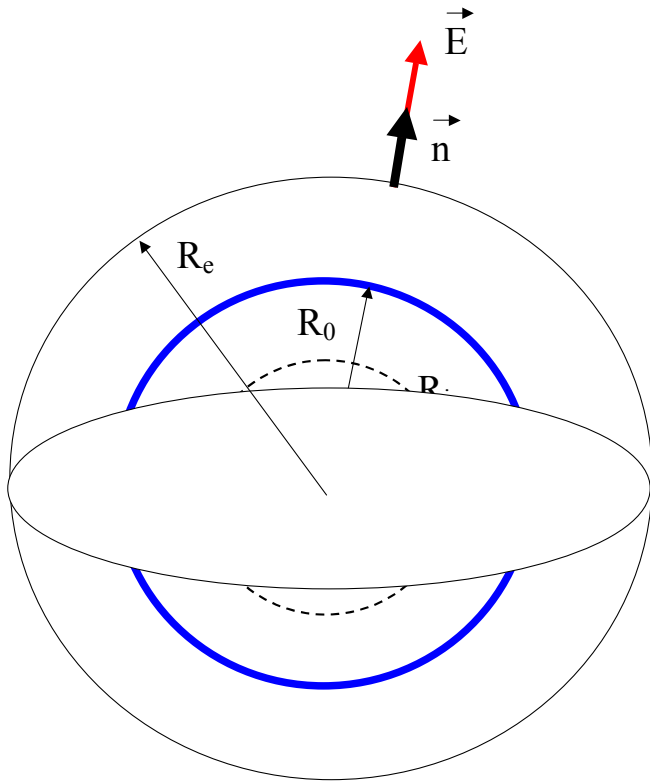


# Câmpul sferei încărcate uniform

$$E_R(R) = \begin{cases} 0 & \text{ptr. } R \leq R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & \text{ptr. } R > R_0 \end{cases}$$

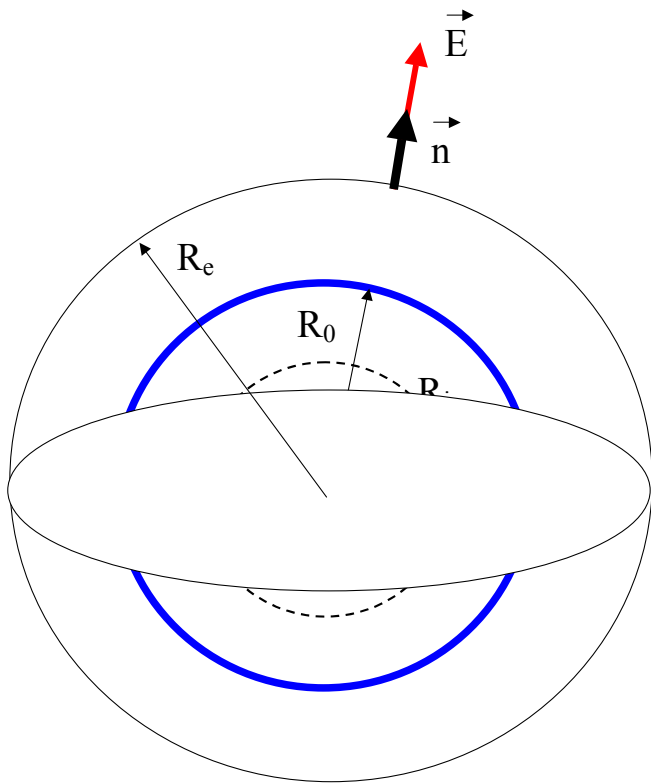


# Calcul cu teorema lui Gauss



$$\Phi = \begin{cases} E_R 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{ptr. } R = R_e > R_0 \\ E_R 4\pi R_0^2 = \frac{Q}{2\epsilon_0} & \text{ptr. } R = R_0 \\ E_R 4\pi R^2 = 0 & \text{ptr. } R = R_i < R_0 \end{cases}$$

# Sferă (distribuție volumică)



$$\Phi = \begin{cases} E_R 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi R_0^3}{3} & ptr. \quad R = R_e > R_0 \\ E_R 4\pi R_0^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi R_0^3}{3} & ptr. \quad R = R_0 \\ E_R 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi R^3}{3} & ptr. \quad R = R_i < R_0 \end{cases}$$

$$E_R = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} & ptr. \quad R \leq R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & ptr. \quad R > R_0 \end{cases}$$

# Potențialul

$$E_R = -\frac{dV}{dR} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} & ptr. \quad R \leq R_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & ptr. \quad R > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dR} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} & ptr. \quad R \leq R_0 \\ \frac{dV}{dR} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & ptr. \quad R > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R^2}{2R_0} + C_1 & ptr. \quad R \leq R_0 \\ V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + C_2 & ptr. \quad R > R_0 \end{cases}$$

prof.dr. Alexandru STANCU 2009

# Calcul

$$\begin{cases} V = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \frac{R^2}{2R_0^2} + C_1 & ptr. \quad R \leq R_0 \\ V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + C_2 & ptr. \quad R > R_0 \end{cases}$$

Condiții la limită !!!

$$\boxed{V \Big|_{\substack{R=R_0 \\ R < R_0}} = V \Big|_{\substack{R=R_0 \\ R > R_0}}}$$

$$C_2 = 0$$

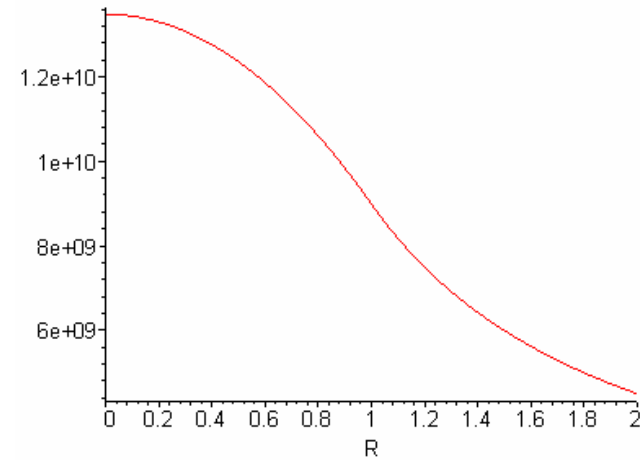
$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \frac{R_0^2}{2R_0^2} + C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

$$\boxed{V \Big|_{R \rightarrow \infty} = 0}$$

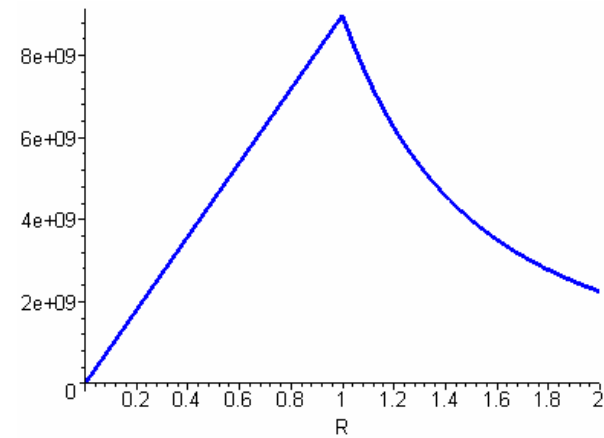
$$C_1 = \frac{3}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

# Rezultate

$$\left\{ \begin{array}{ll} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \left( \frac{3}{2} - \frac{R^2}{2R_0^2} \right) & ptr. \quad R \leq R_0 \\ V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & ptr. \quad R > R_0 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{ll} E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} & ptr. \quad R \leq R_0 \\ E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & ptr. \quad R > R_0 \end{array} \right.$$





# Potențialul electric

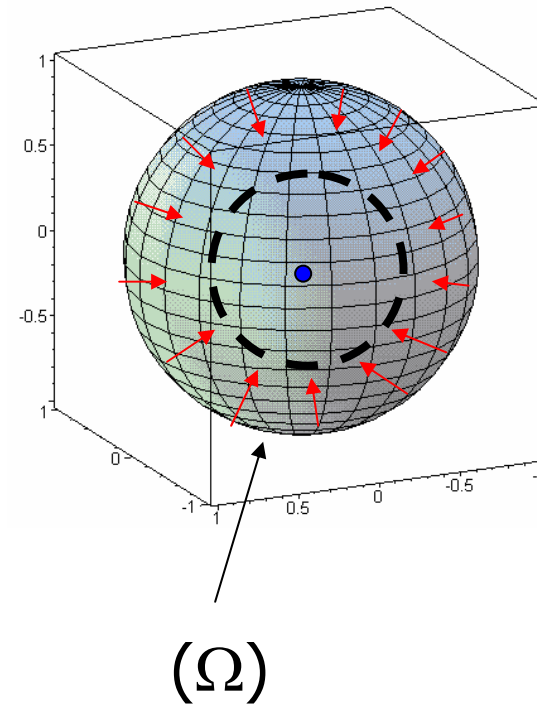
- Electrostatică
  - Teorema lui Gauss în forma locală
  - Ecuațiile lui Laplace și Poisson
  - Energia câmpului electrostatic

# Teorema lui Gauss în forma locală

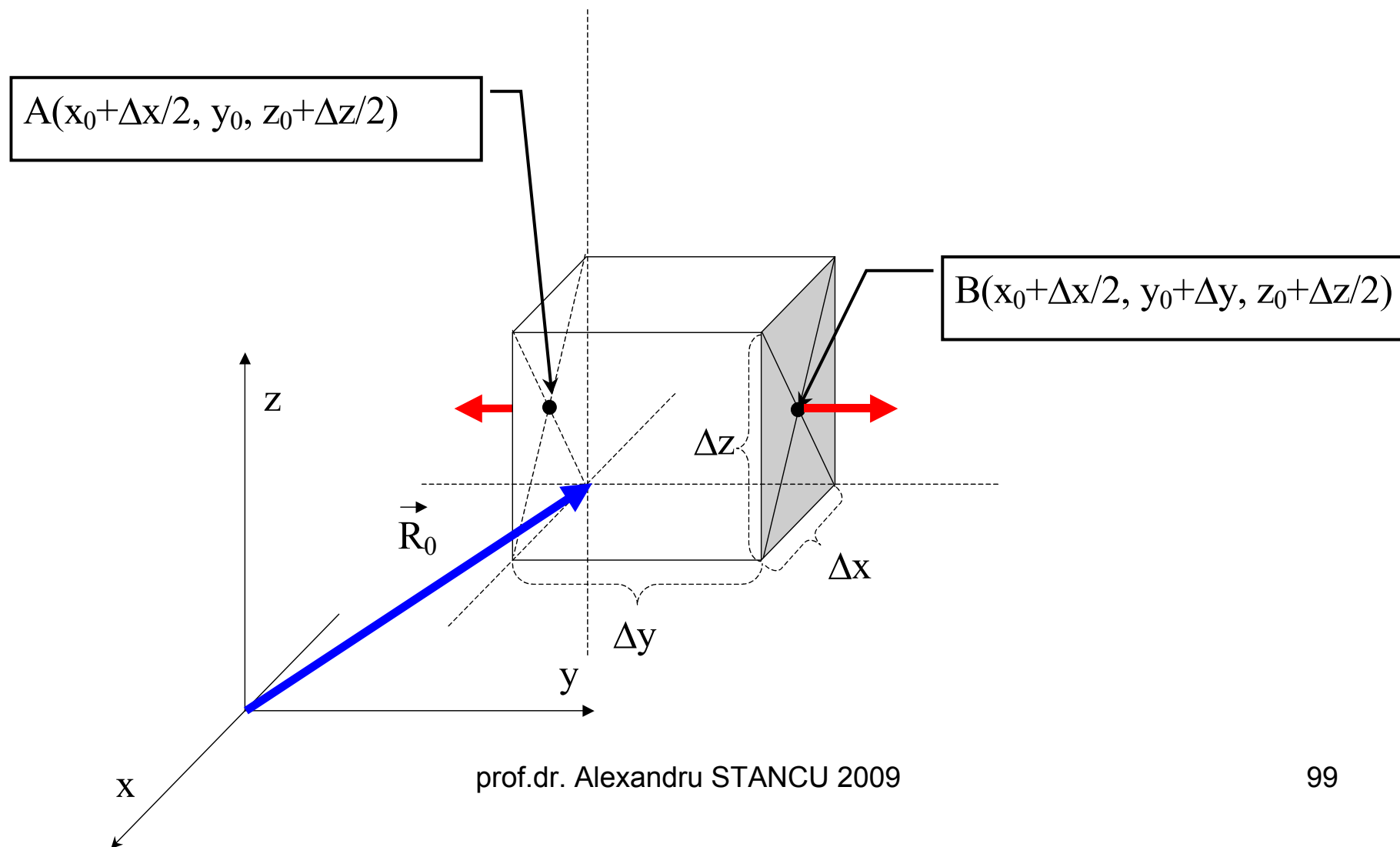
$$\Delta\Phi = \int_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Delta q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta v} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

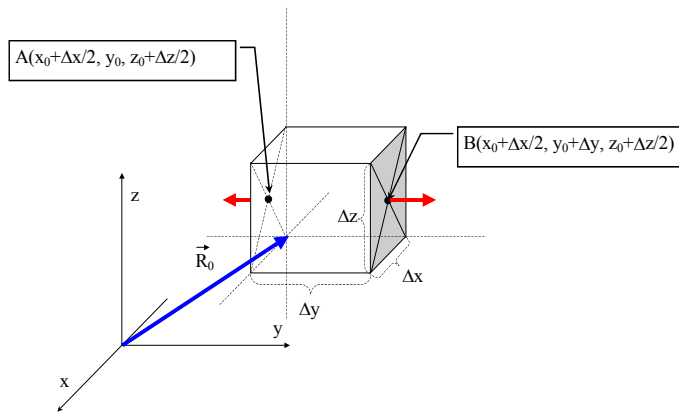
$$\int_{(\Omega)} \operatorname{div} \vec{E} dv = \int_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



# Divergența în coordonate carteziene



# div (calcul)

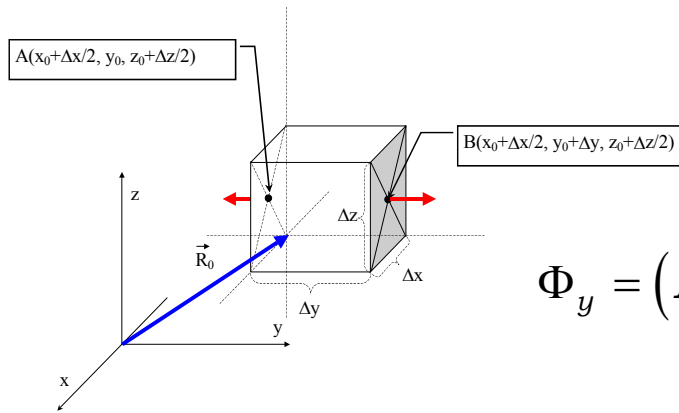


$$\begin{aligned}\Phi_y &= \Phi_A + \Phi_B = -E_{yA} \Delta x \Delta z + E_{yB} \Delta x \Delta z = \\ &= (E_{yB} - E_{yA}) \Delta x \Delta z\end{aligned}$$

$$E_{yA} = E_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

$$E_{yB} = E_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + \Delta y \frac{\partial E_y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, z_0} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_y}{\partial z} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

# div (calcul)



$$\Phi_y = \Phi_A + \Phi_B = -E_{yA} \Delta x \Delta z + E_{yB} \Delta x \Delta z =$$

$$= (E_{yB} - E_{yA}) \Delta x \Delta z$$

$$\Phi_y = (E_{yB} - E_{yA}) \Delta x \Delta z = \left[ \Delta y \frac{\partial E_y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \right] \Delta x \Delta z =$$

$$= \Delta v \frac{\partial E_y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

$$\Phi_x = \Delta v \frac{\partial E_x}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \quad \Phi_z = \Delta v \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{x_0, y_0, z_0}$$

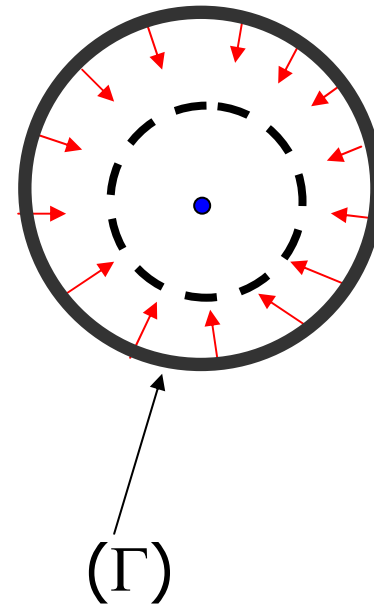
$$\Phi_{total} = \Delta v \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Big|_{x_0, y_0, z_0} \cdot \text{Al} \left[ \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right]$$

# Rotorul

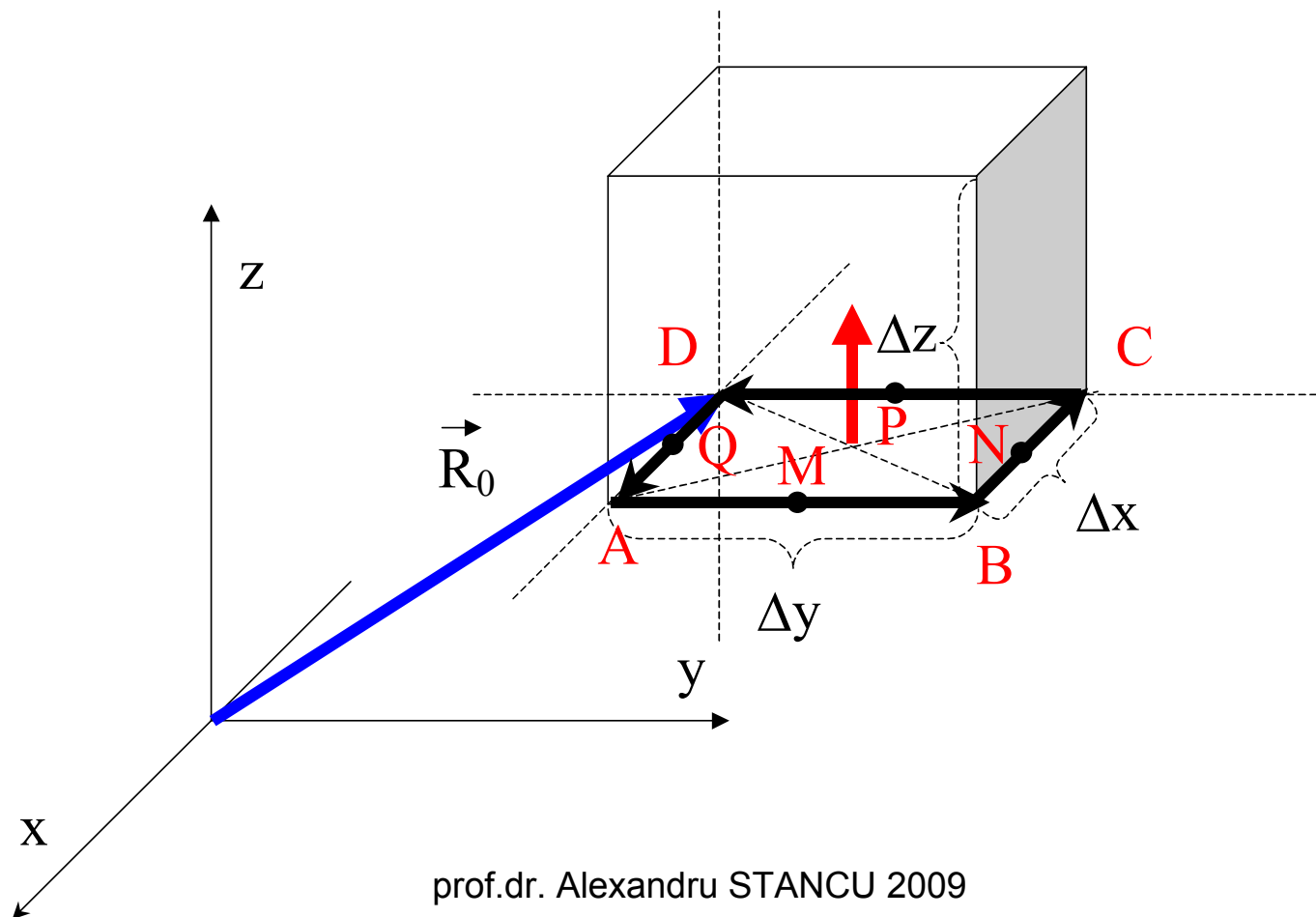
$$\Delta C = \int_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\left( \text{rot } \vec{E} \right)_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta S} = 0$$

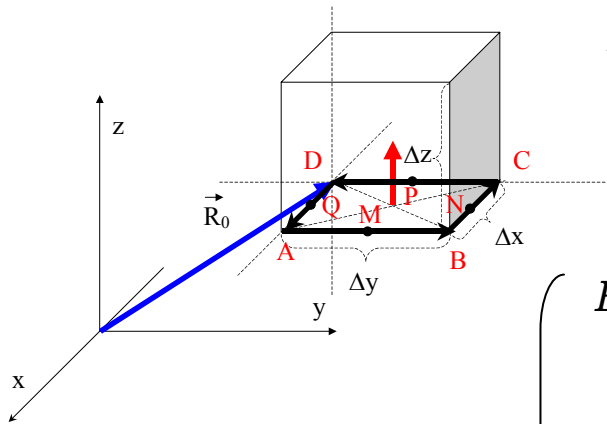
$$\int_{(\Sigma)} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



# rot (calcul)



# rot (calcul)



$$\Delta C = C_{ABCD} = C_{AB} + C_{BC} + C_{CD} + C_{DA} =$$

$$= E_{yM} \Delta y - E_{xN} \Delta x - E_{yP} \Delta y + E_{xQ} \Delta x$$

$$E_{yM} = E_y(x_0, y_0, z_0) + \Delta x \left. \frac{\partial E_y}{\partial x} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \frac{\Delta y}{2} \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{x_0, y_0, z_0}$$

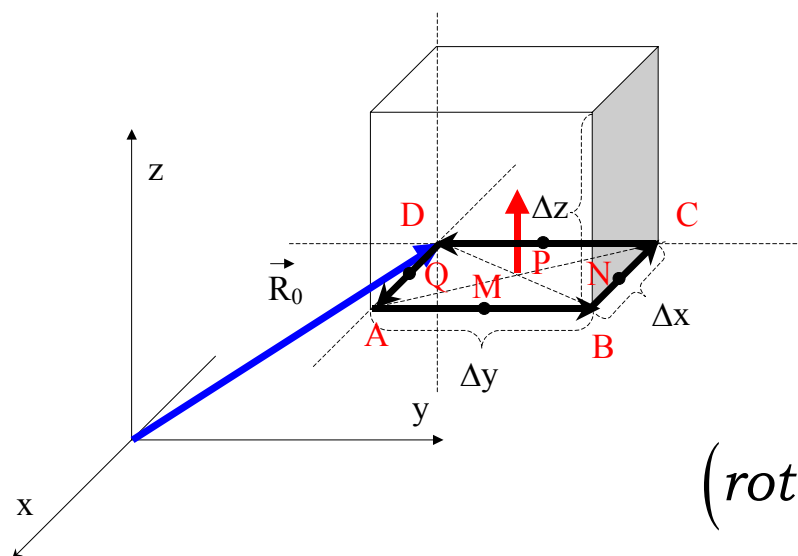
$$E_{yP} = E_y(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{x_0, y_0, z_0}$$

$$E_{xN} = E_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x_0, y_0, z_0} + \Delta y \left. \frac{\partial E_x}{\partial y} \right|_{x_0, y_0, z_0}$$

$$E_{xQ} = E_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{x_0, y_0, z_0}$$



# rot (calcul)



$$\begin{aligned}\Delta C &= \Delta y (E_{yM} - E_{yP}) - \Delta x (E_{xN} - E_{xQ}) = \\ &= \Delta y \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial x} - \Delta x \Delta y \frac{\partial E_x}{\partial y} = \\ &= \Delta x \Delta y \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$(rot \vec{E})_z = \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

|                 |                               |                               |                               |                           |
|-----------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| $rot \vec{E} =$ | $\vec{i}$                     | $\vec{j}$                     | $\vec{k}$                     |                           |
|                 | $\frac{\partial}{\partial x}$ | $\frac{\partial}{\partial y}$ | $\frac{\partial}{\partial z}$ | $= \nabla \times \vec{E}$ |
|                 | $E_x$                         | $E_y$                         | $E_z$                         |                           |

# Ecuatia Poisson. Ecuatia Laplace

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\Delta V = 0$$

# Condiții la limită. Soluția ecuației Laplace.

$$\Delta V = 0$$

Într-un anumit  
domeniu din spațiu

## Condiții la limită

- Dirichlet  $V|_{\text{frontiera domeniului}} = V_0(\vec{R})$
- Neumann  $\frac{\partial V}{\partial n}|_{\text{frontiera domeniului}} = V'_0(\vec{R})$
- mixte

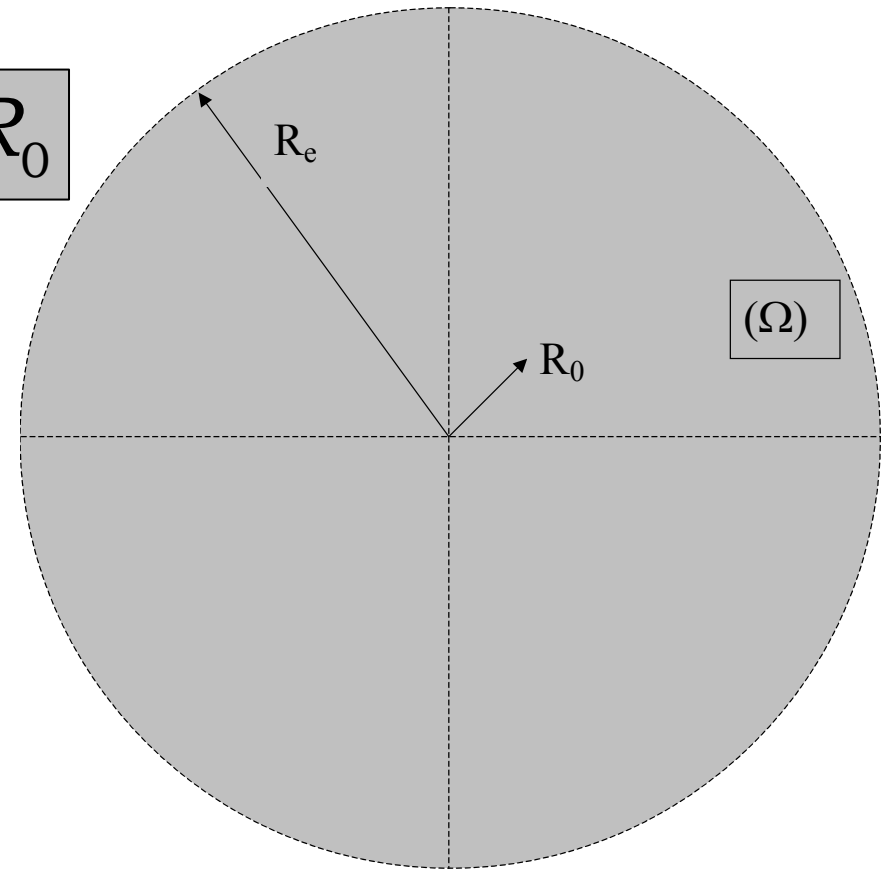
Soluție unică în domeniul  
respectiv!!!

$$V(\vec{R})$$

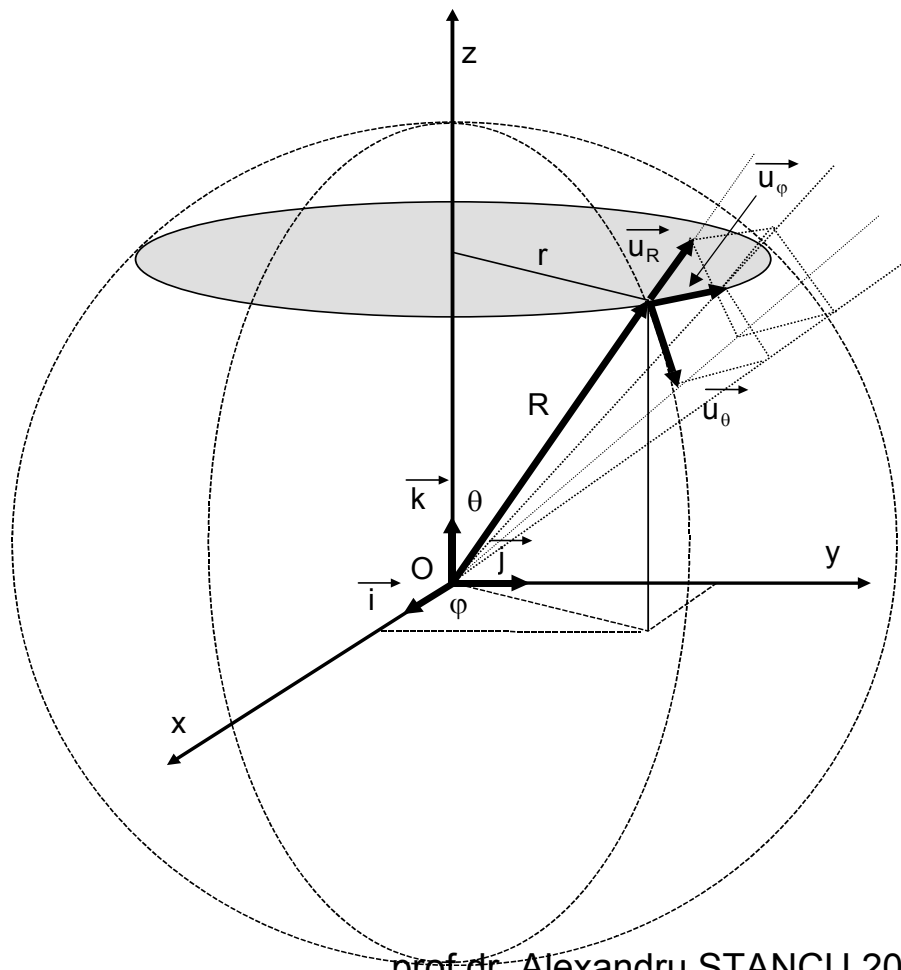
# Exemplu

$$\Delta V = 0 \quad \text{pt. } R \geq R_0$$

$$\begin{cases} V|_{R=R_0} = V_0 \\ V|_{R \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$

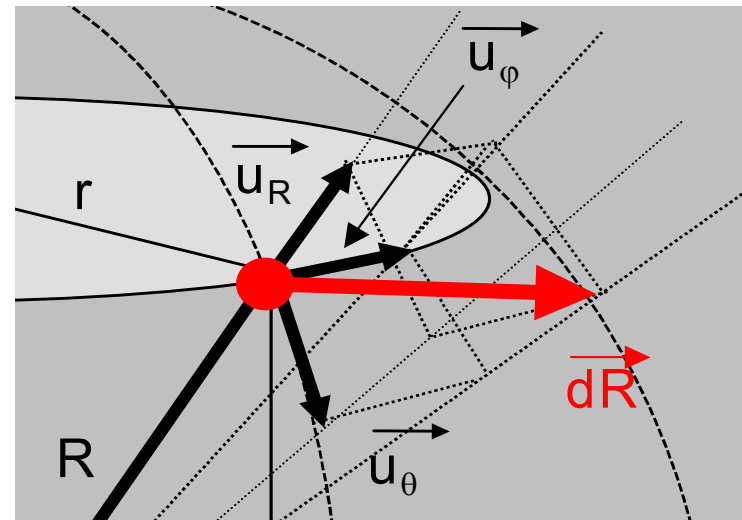
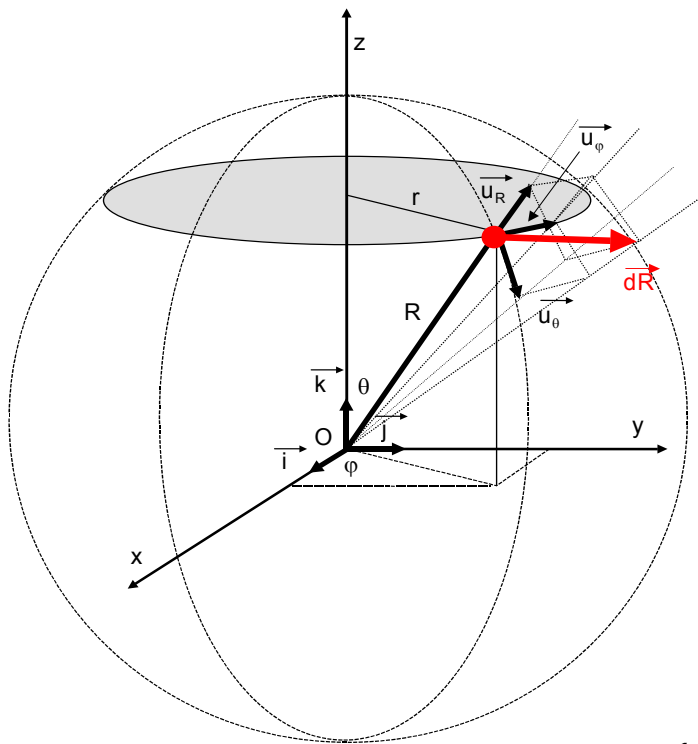


# Coordonate sferice



$$\begin{cases} x_p = R_p \sin \theta_p \cos \varphi_p \\ y_p = R_p \sin \theta_p \sin \varphi_p \\ z_p = R_p \cos \theta_p \end{cases}$$

# Coordonate curbilinii ortogonale

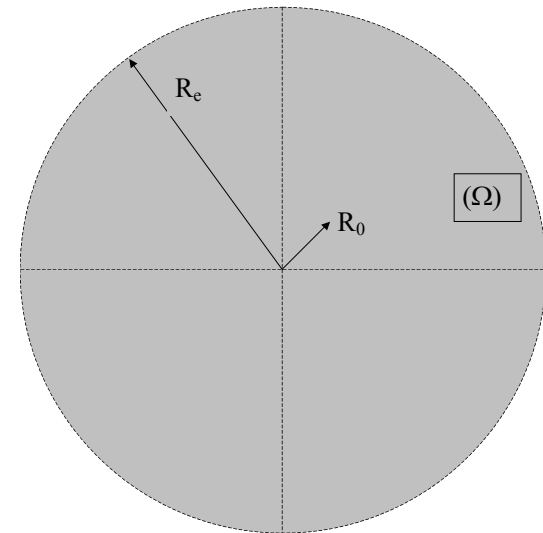


$$d\vec{R} = dR \vec{u}_R + R d\theta \vec{u}_\theta + R \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

# Exemplu ... revenire

$$\Delta V = 0 \quad \text{pt. } R \geq R_0$$

$$\begin{cases} V|_{R=R_0} = V_0 \\ V|_{R \rightarrow \infty} = 0 \end{cases}$$



Simetrie sferica!

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{df}{dR} \right) \end{aligned}$$

# Soluție

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dV}{dR} \right) = 0 \\ V(R_0) = V_0 \\ V|_{R \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right.$$

$R^2 \frac{dV}{dR} = C_1$   
 $\downarrow$   
 $\frac{dV}{dR} = \frac{C_1}{R^2}$   
 $\downarrow$   
 $V = -\frac{C_1}{R} + C_2$

$C_2 = 0$

prof.dr. Alexandru C. I. N. C. 2009



## Soluție (continuare)

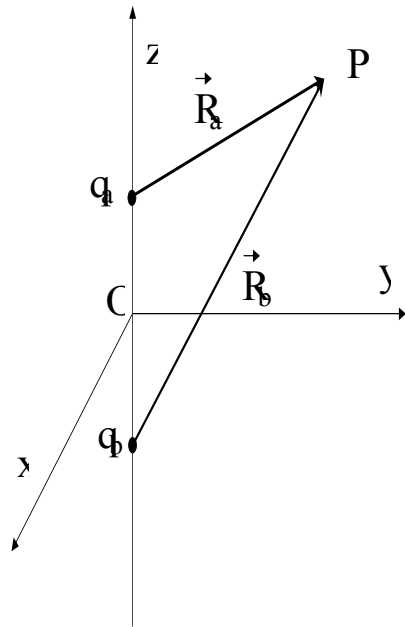
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left( R^2 \frac{dV}{dR} \right) = 0 \\ V(R_0) = V_0 \\ V|_{R \rightarrow \infty} = 0 \end{array} \right.$$

$$V_0 = -\frac{C_1}{R_0}$$

$$V = V_0 \frac{R_0}{R}$$

$$V = -\frac{C_1}{R} + C_2$$

# Câmpul de parte de un sistem de sarcini



$$\vec{R} = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}, R = |\vec{R}|$$

$$\vec{R}_a = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + \left(z_p - \frac{d}{2}\right) \vec{k} = r_p \vec{u}_r + \left(z_p - \frac{d}{2}\right) \vec{k}, R_a = |\vec{R}_a|$$

$$\vec{R}_b = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + \left(z_p + \frac{d}{2}\right) \vec{k} = r_p \vec{u}_r + \left(z_p + \frac{d}{2}\right) \vec{k}, R_b = |\vec{R}_b|$$

$$V = V_a + V_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_a}{R_a} + \frac{q_b}{R_b} \right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_a \frac{\vec{R}_a}{R_a^3} + q_b \frac{\vec{R}_b}{R_b^3} \right)$$

## 2 sarcini

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_a}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} + \frac{q_b}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_a \left[ r_p \vec{u}_r + \left( z_p - \frac{d}{2} \right) \vec{k} \right]}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_b \left[ r_p \vec{u}_r + \left( z_p + \frac{d}{2} \right) \vec{k} \right]}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

# Ce se întâmplă la distanțe mari?

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{r_p, z_p \gg d} \left\{ \frac{1}{\left[ r_p^2 + \left( z_p - \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[ r_p^2 + \left( z_p + \frac{d}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{r_p, z_p \gg d} \left\{ \frac{1}{\left[ r_p^2 + z_p^2 - z_p d + \frac{d^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[ r_p^2 + z_p^2 + z_p d + \frac{d^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_p} \lim_{R_p, r_p, z_p \gg d} \left\{ \frac{1}{\left[ 1 - \frac{z_p d}{R_p^2} + \frac{d^2}{4R_p^2} \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{z_p d}{R_p^2} + \frac{d^2}{4R_p^2} \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}
 \end{aligned}$$

# Continuare

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_p} \lim_{R_p, r_p, z_p \gg d} \left\{ \frac{1}{\left[1 - \frac{z_p d}{R_p^2} + \frac{d^2}{4R_p^2}\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[1 + \frac{z_p d}{R_p^2} + \frac{d^2}{4R_p^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \right\} =$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_p} \left\{ \left(1 + \frac{z_p d}{2R_p^2}\right) - \left(1 - \frac{z_p d}{2R_p^2}\right) \right\} = \frac{q z_p d}{4\pi\epsilon_0 R_p^3}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}_e \cdot \frac{\vec{R}_p}{R_p^3}$$

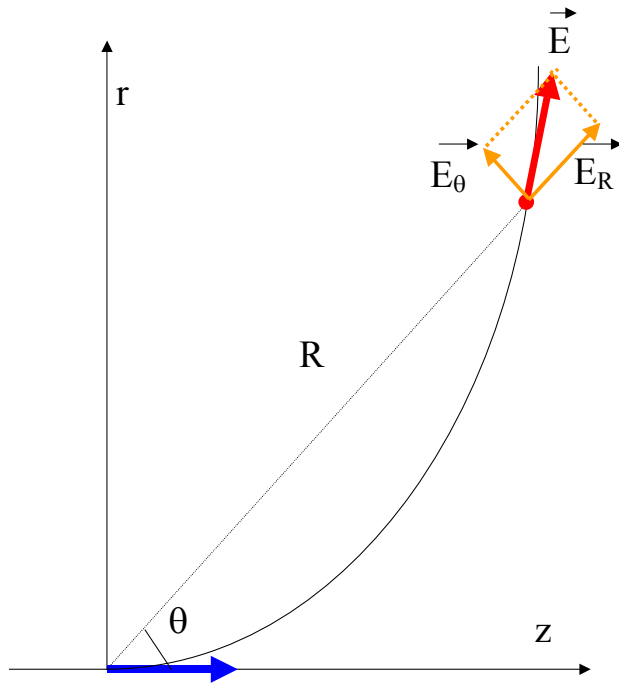
## Formule generale

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}_e \cdot \frac{\vec{R}_p}{R_p^3}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{p}_e \cdot \vec{R}_p) \vec{R}_p}{R_p^5} - \frac{\vec{p}_e}{R_p^3} \right]$$

Temă... Calculați E

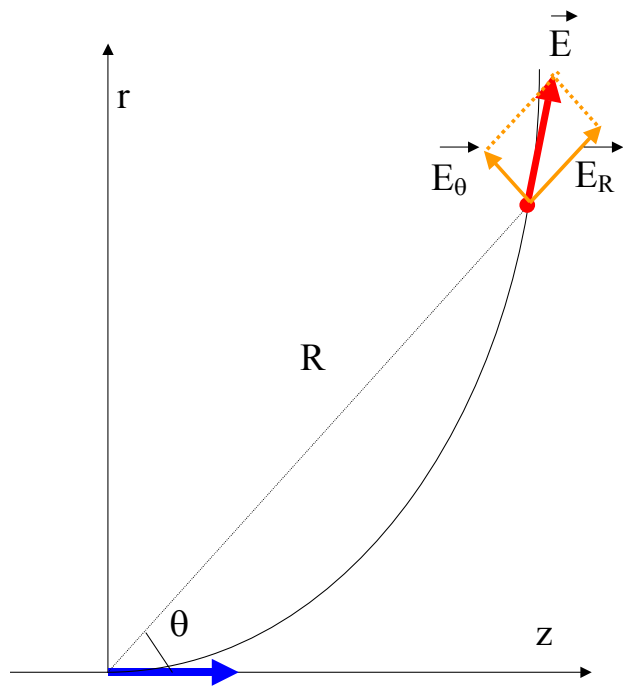
# În plan



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}_e \cdot \frac{\vec{R}_p}{R_p^3} = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R_p^2}$$

$$\begin{cases} E_R = -\frac{\partial V}{\partial R_p} = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R_p^3} \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{R_p \partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R_p^3} \end{cases}$$

# Ecuatia liniei de câmp



$$\vec{E} = E_R \vec{u}_R + E_\theta \vec{u}_\theta$$

$$d\vec{l} = dR \vec{u}_R + R d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{E} \times d\vec{l} = 0$$

$$(E_R \vec{u}_R + E_\theta \vec{u}_\theta) \times (dR \vec{u}_R + R d\theta \vec{u}_\theta) = 0$$

$$E_R R d\theta \vec{u}_\phi + E_\theta dR (-\vec{u}_\phi) = 0$$

$$\frac{R d\theta}{E_\theta} = \frac{dR}{E_R}$$



## Ecuatia liniei de câmp

$$\begin{cases} E_R = -\frac{\partial V}{\partial R_p} = \frac{2p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R_p^3} \\ E_\theta = -\frac{\partial V}{R_p \partial \theta} = \frac{p_e \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R_p^3} \end{cases}$$

$$\frac{R d\theta}{E_\theta} = \frac{dR}{E_R}$$

$$R = k \sin^2 \theta$$

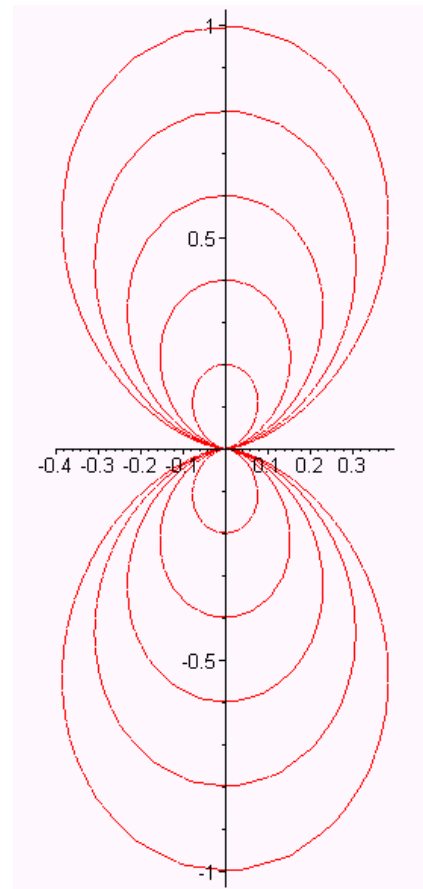
$$\frac{R d\theta}{\sin \theta} = \frac{dR}{2 \cos \theta}$$
$$\frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \frac{dR}{R}$$

$$\frac{2d(\sin \theta)}{\sin \theta} = \frac{dR}{R}$$

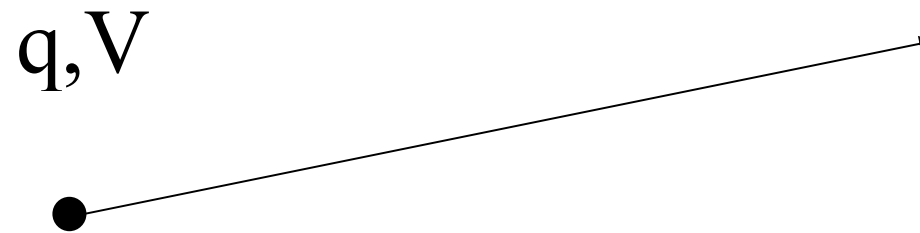
$$d[\ln(\sin^2 \theta)] = d(\ln R)$$

# Linii de câmp

$$R = k \sin^2 \theta$$



# Energia câmpului electric



$$W = qV$$

În câmp electric EXTERIOR

# Energia unui sistem de n sarcini

$$\begin{array}{cc} q_1, V_{12} & q_2, V_{21} \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

$$W = q_2 V_{21} = q_1 V_{12} = \frac{1}{2} (q_1 V_{12} + q_2 V_{21}) = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2)$$

$$W = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + \dots + q_n V_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i$$

# Energia unui sistem de sarcini distribuite

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\operatorname{div} \vec{E}) V dv$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} (V \vec{E}) = V (\operatorname{div} \vec{E}) + \vec{E} \cdot \operatorname{grad} V$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int \operatorname{div} (V \vec{E}) dv + \int \vec{E} \cdot (-\operatorname{grad} V) dv \right]$$

$$\int \operatorname{div} (V \vec{E}) dv = \int V \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

## Continuare

$$\int \operatorname{div}(V\vec{E}) d\nu = \int V\vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Dacă se integrează pe întreg spațiul ...

$$V \approx \frac{1}{R} \quad E \approx \frac{1}{R^2} \quad S \approx R^2$$

Integrala tinde la zero !

## Continuare

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int \cancel{div(V\vec{E})} dv + \int \vec{E} \cdot (-grad V) dv \right]$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv$$

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \leftarrow \text{Densitatea de energie}$$

# Example

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V dv \quad W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv$$

## 1. Sferă încărcată superficial

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma V_s dS = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_0} \sigma \int dS = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R_0}$$

## Metoda 1



# Example

$$E = \begin{cases} 0 & \text{pt. } R \leq R_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} & \text{pt. } R > R_0 \end{cases}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\nu = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\infty E^2 4\pi R^2 dR =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R_0}^\infty \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 4\pi R^2 dR = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$



# Example

## 2. Sferă încărcată în volum

$$\left\{ \begin{array}{ll} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \left( \frac{3}{2} - \frac{R^2}{2R_0^2} \right) & ptr. \quad R \leq R_0 \\ V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & ptr. \quad R > R_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} & ptr. \quad R \leq R_0 \\ E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & ptr. \quad R > R_0 \end{array} \right.$$

# Example

$$\begin{cases} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \left( \frac{3}{2} - \frac{R^2}{2R_0^2} \right) & \text{ptr. } R \leq R_0 \\ V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & \text{ptr. } R > R_0 \end{cases}$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv$$

prof

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \rho V dv = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \rho \int \left( \frac{3}{2} - \frac{R^2}{2R_0^2} \right) 4\pi R^2 dR = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \rho 4\pi \int_0^{R_0} \left( \frac{3}{2} - \frac{R^2}{2R_0^2} \right) R^2 dR = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \rho 4\pi \left( \frac{3}{2} \frac{R_0^3}{3} - \frac{1}{2R_0^2} \frac{R_0^5}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0} \rho 4\pi R_0^3 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} \end{aligned}$$

# Example

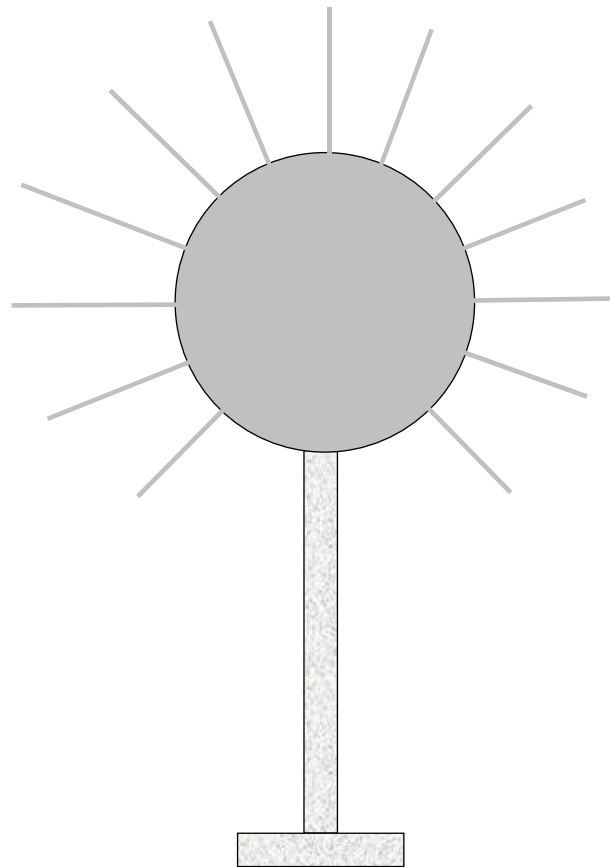
$$\begin{cases} E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} & \text{ptr. } R \leq R_0 \\ E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} & \text{ptr. } R > R_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_0^{R_0} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2} \frac{R}{R_0} \right)^2 4\pi R^2 dR + \int_{R_0}^{\infty} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right)^2 4\pi R^2 dR \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_0^6} \int_0^{R_0} R^4 dR + \int_{R_0}^{\infty} \frac{1}{R^2} dR \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_0^6} \frac{R_0^5}{5} + \frac{1}{R_0} \right] = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} \end{aligned}$$

# Câmpul electric în jurul conductorilor

- Conductorii în electrostatică
- Teorema lui Coulomb
- Presiunea electrostatică
- Capacitatea electrică
- Condensatorul
- Influența electrostatică
- Metoda imaginilor

# Linii de câmp

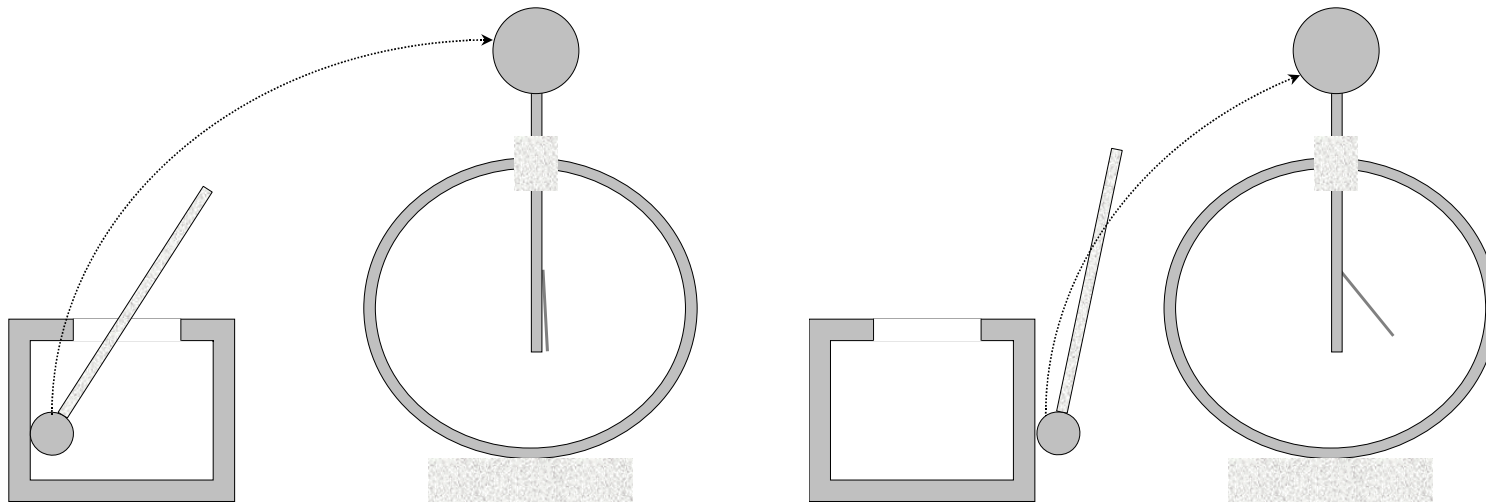


## Experiment

Liniile de câmp  
sunt normale la  
suprafața  
conductorului

# Conductori în electrostatică

- Sarcinile electrice se distribuie pe suprafața exterioară a conductorului
- Câmpul în interiorul conductorului este nul

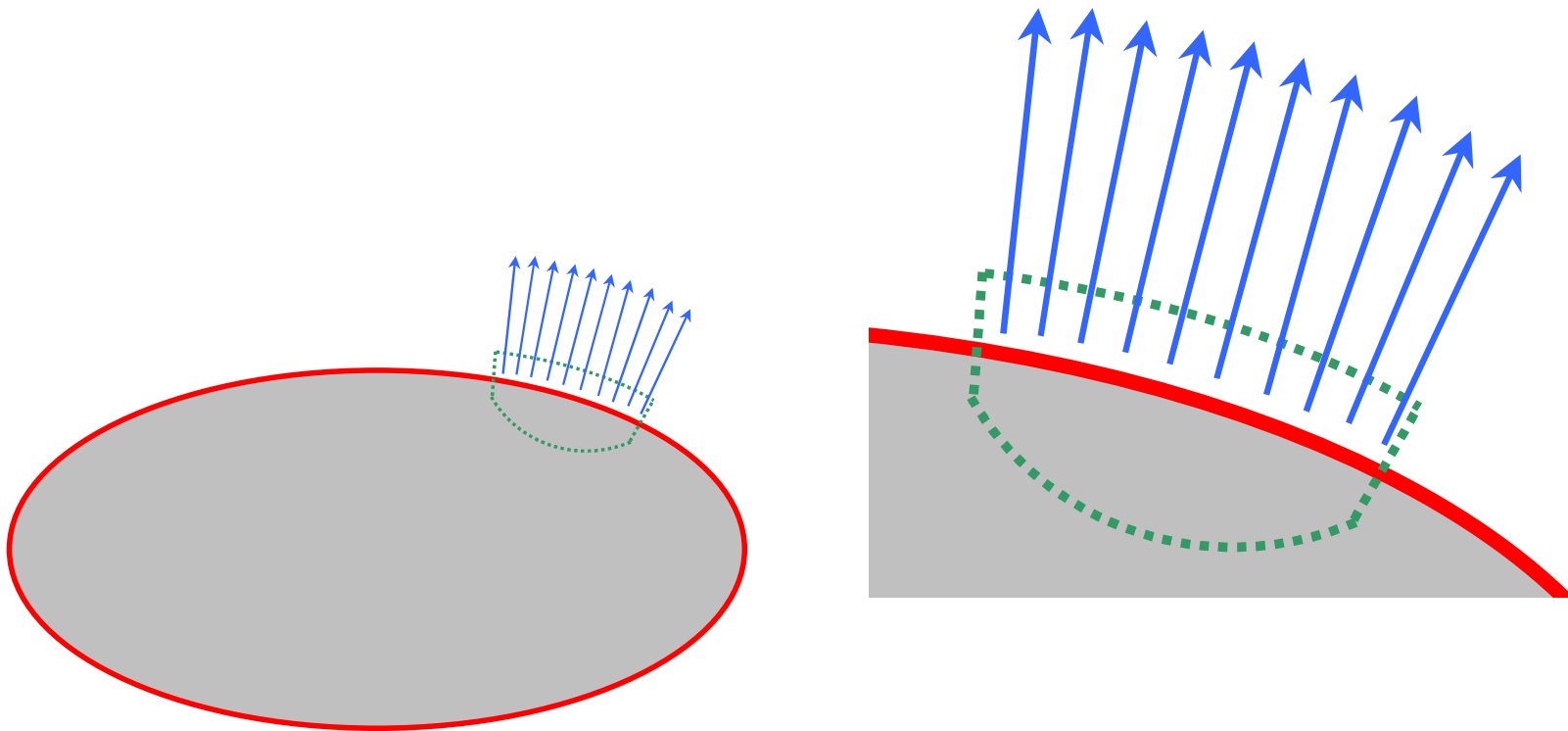


# Proprietăți

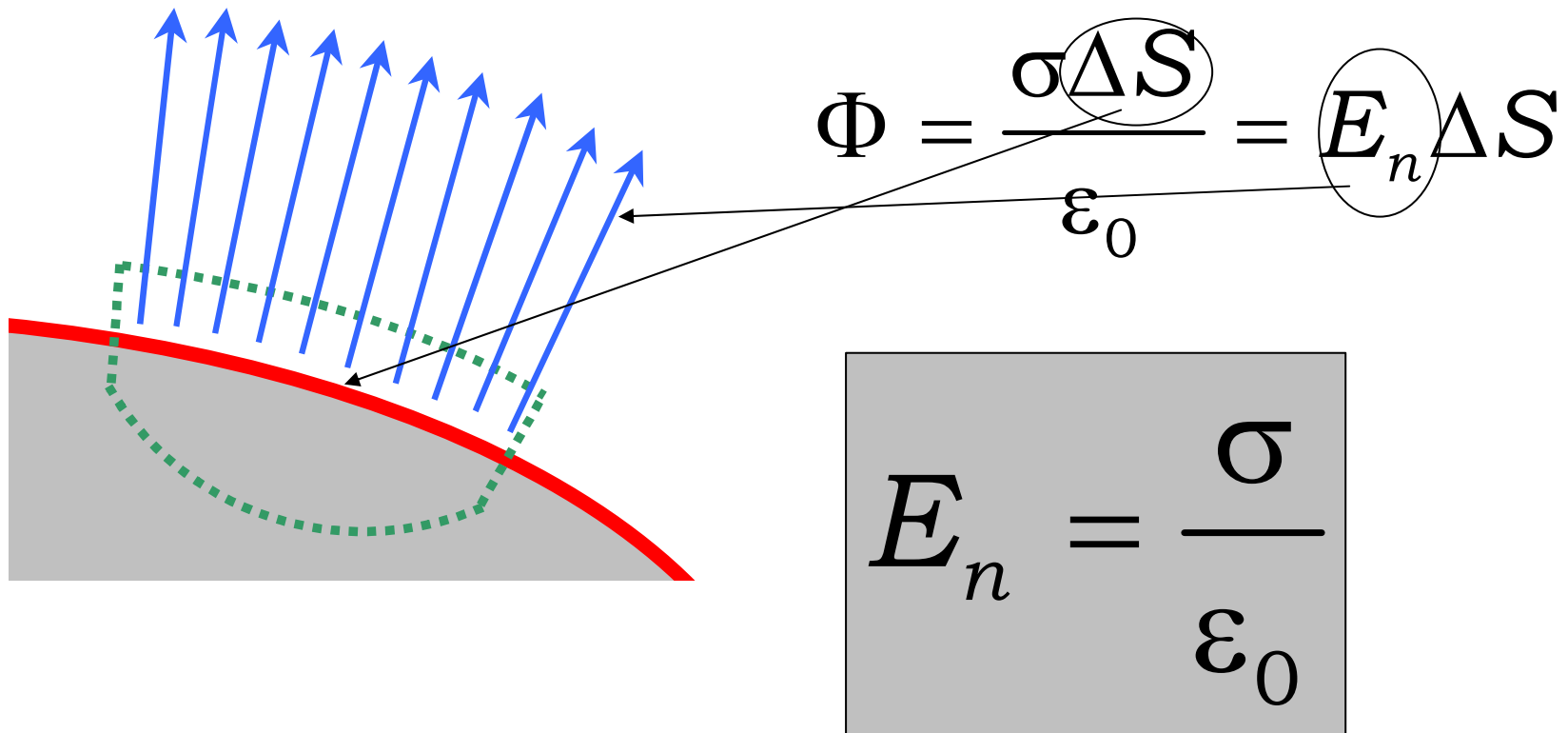
- Câmp zero în interiorul conductorului
- Potențialul constant
- Sarcina se distribuie la suprafață
- Liniile de câmp sunt normale la suprafață



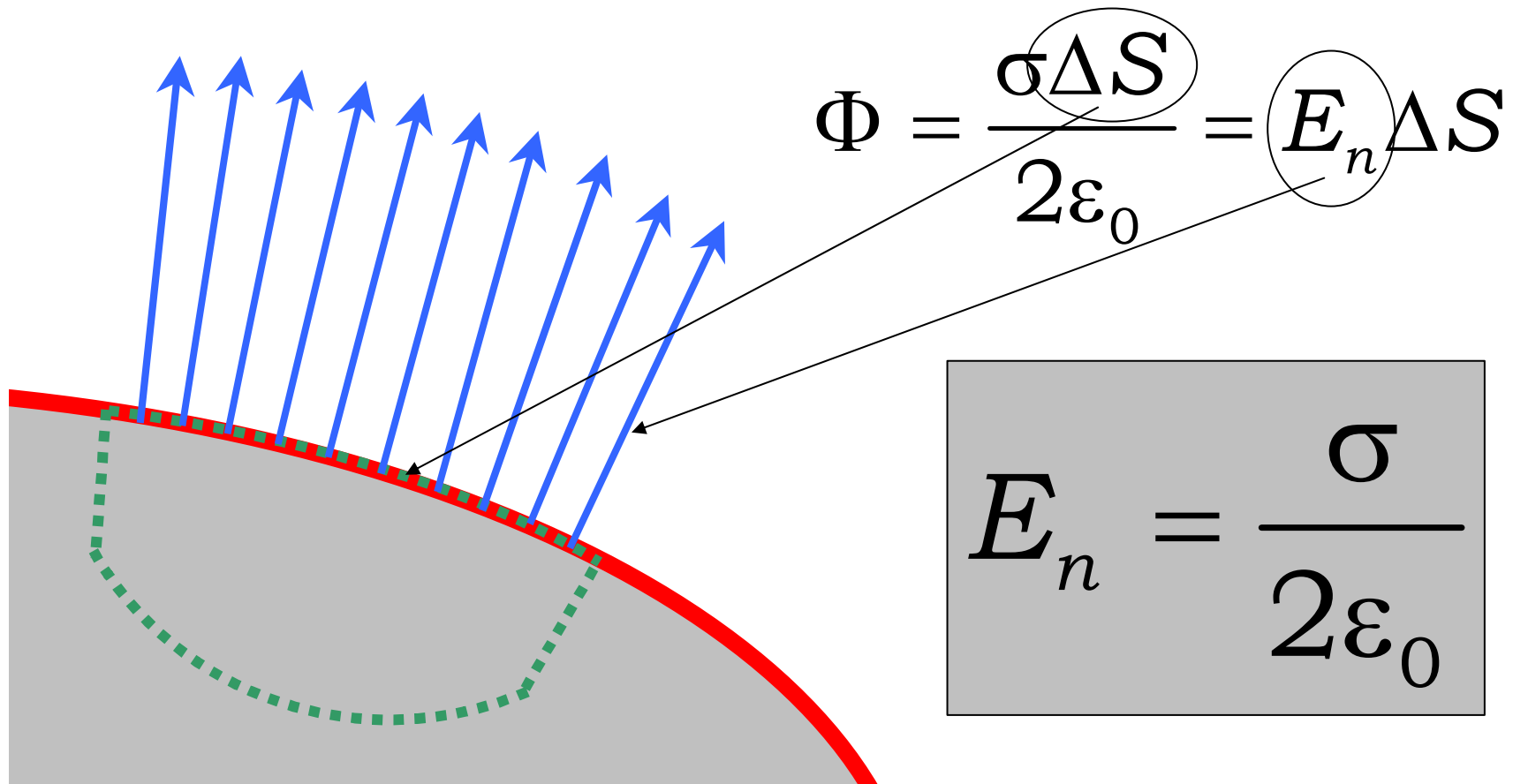
# Teorema lui Coulomb



# Câmpul în apropierea conductorului



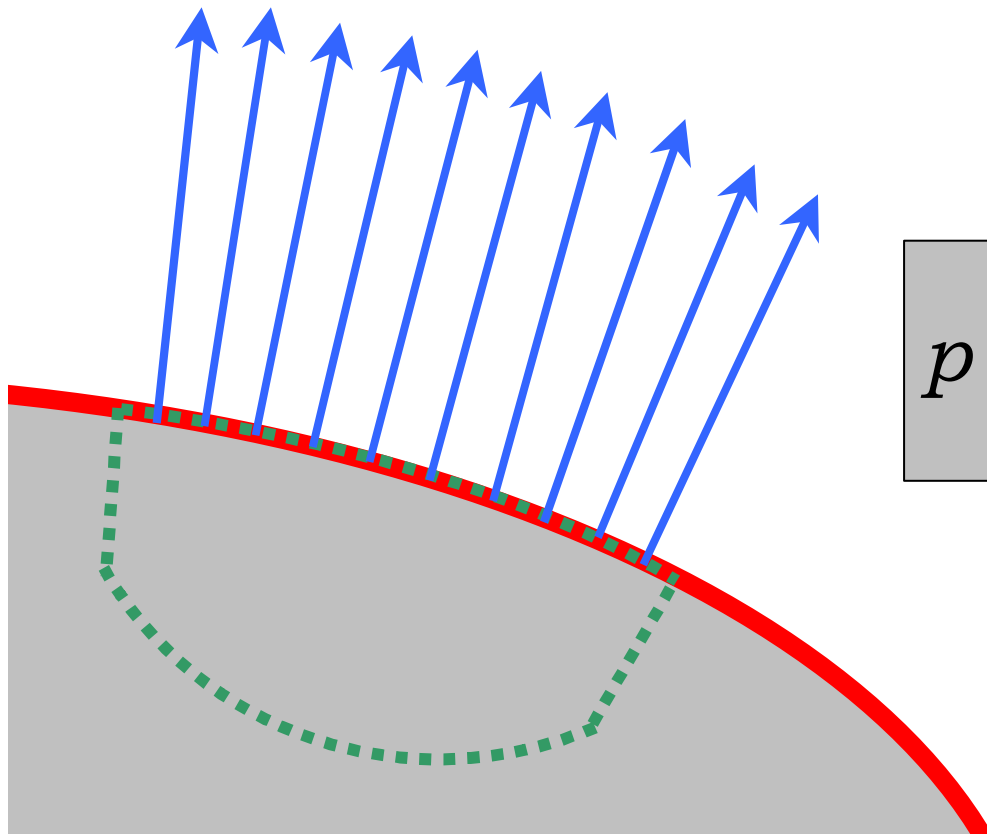
# Câmpul pe suprafața conductorului



# Câmpul

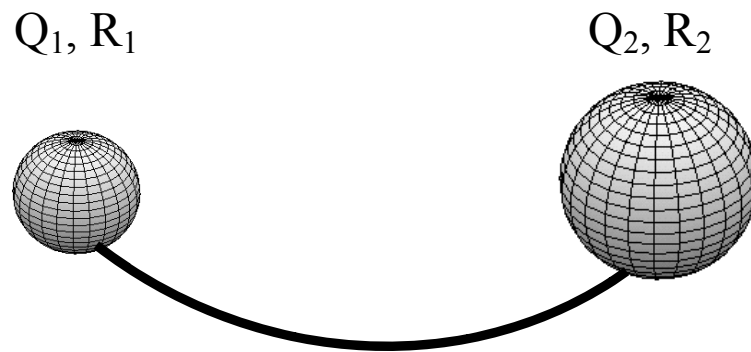
$$E_n = \begin{cases} 0 & \text{în interior} \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{pe suprafață} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{în apropierea suprafeței} \end{cases}$$

# Presiunea electrostatică



$$p = \frac{(\sigma \Delta S) E_{nS}}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

# Densitatea de sarcină



$$V_1 = V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$Q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2$$

$$Q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2$$

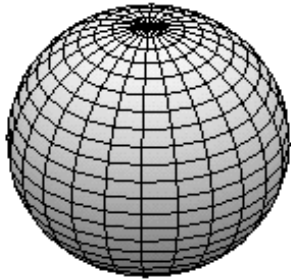
$$\frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 = \text{constant}$$

Regulă: rază mică, densitate de sarcină mare

## Capacitatea conductorului izolat

$Q, V$



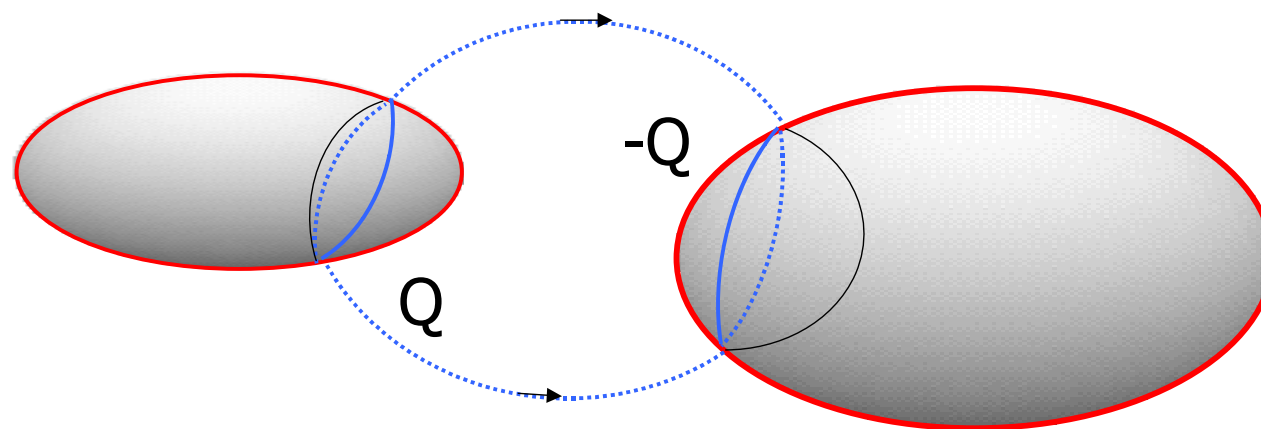
$Q, V$

$nQ, nV \leftarrow$  Principiul superpoziției

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$\langle C \rangle_{SI} = 1F = \frac{1C}{1V} \quad (farad)$$

# Influența electrostatică

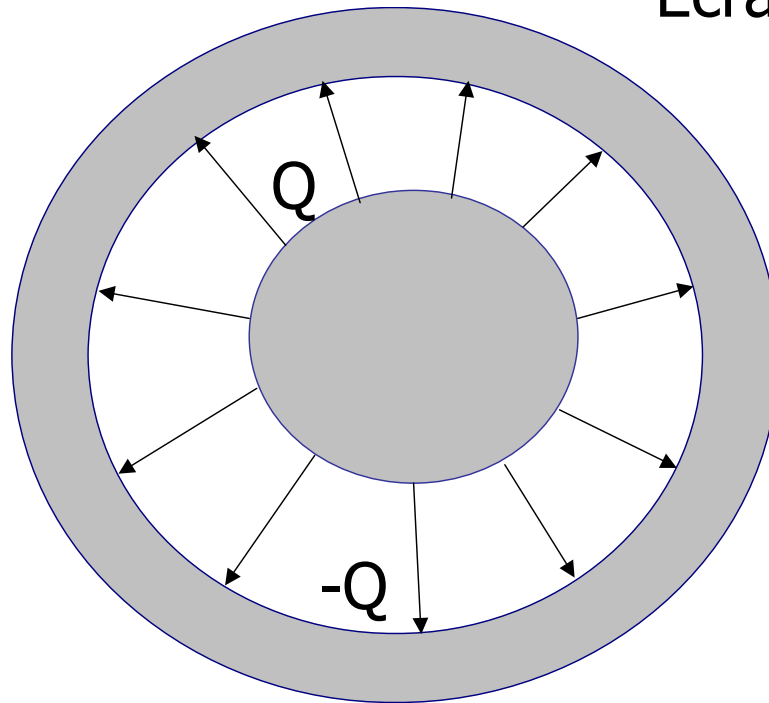


Elemente corespondente

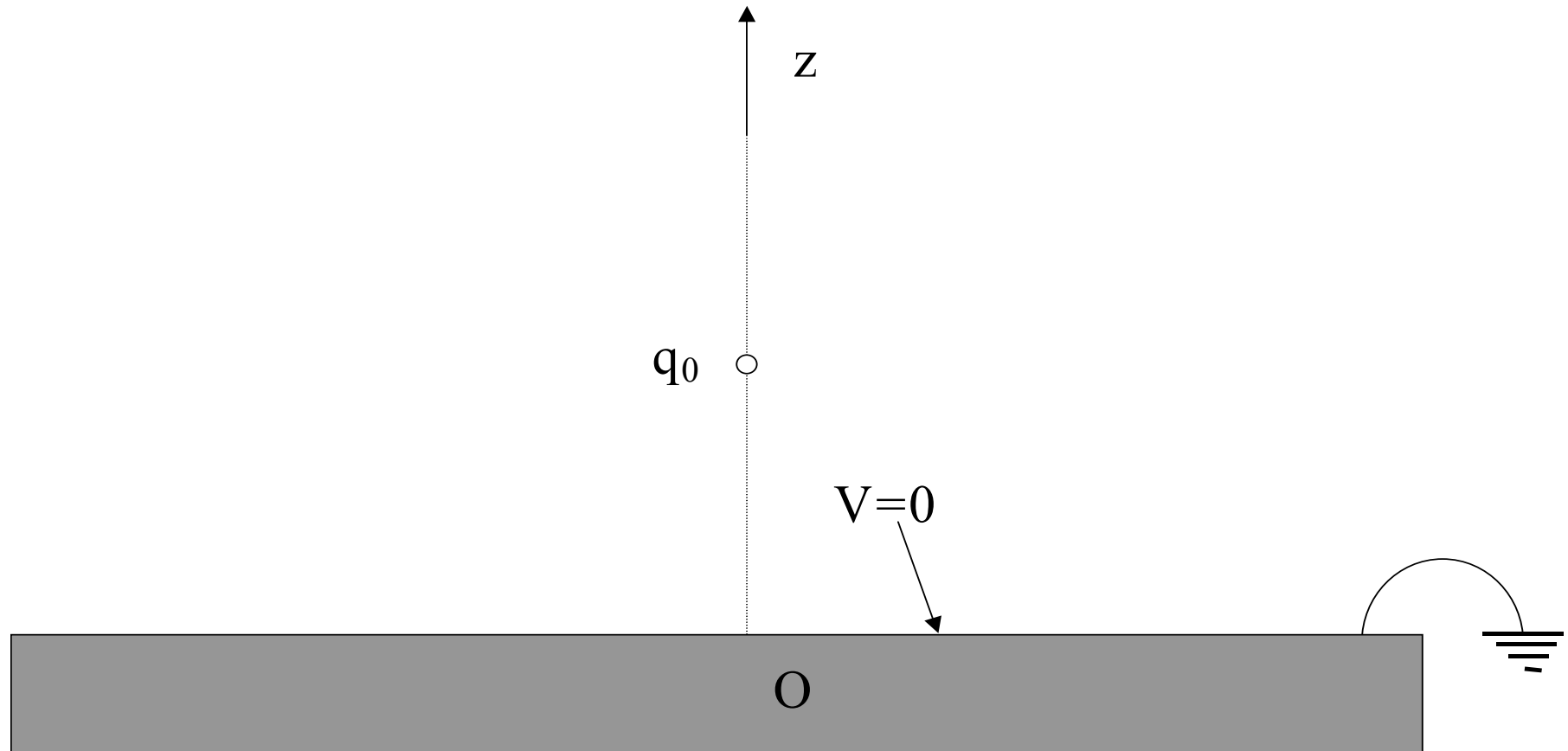


# Influența totală

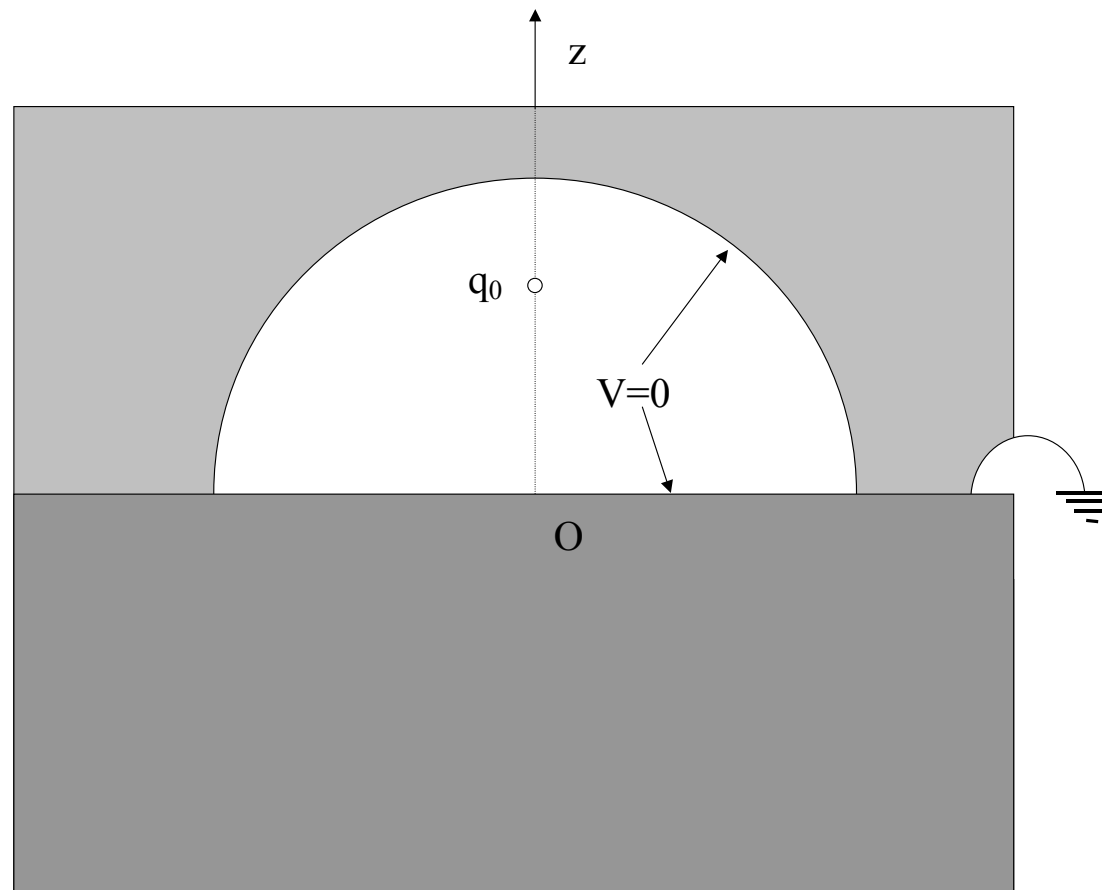
Ecranul electric



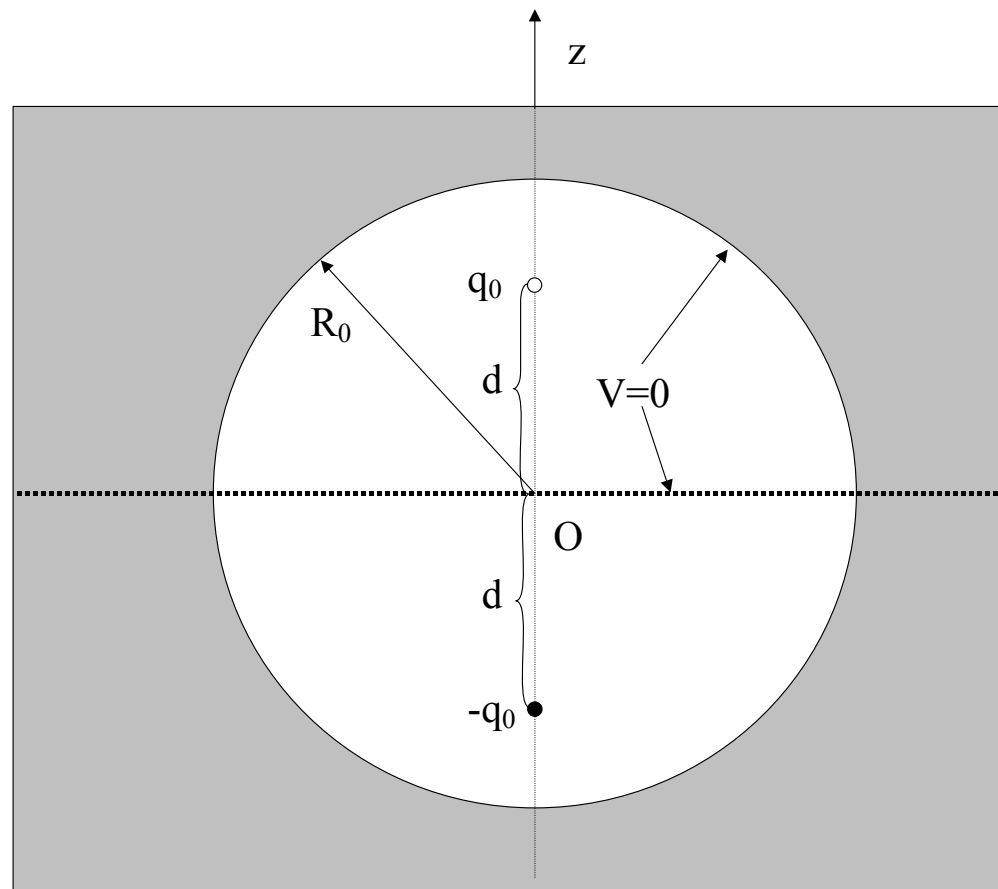
# Metoda imaginilor



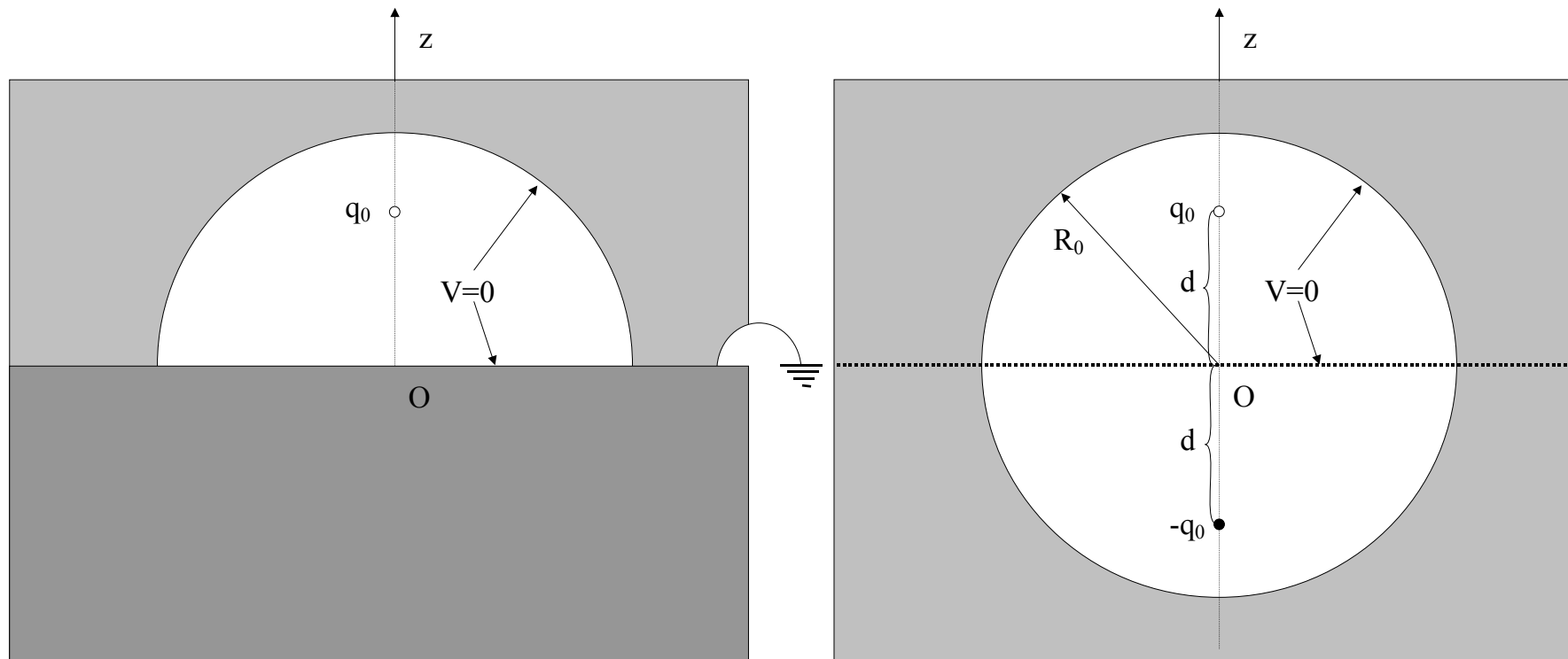
# Cazul planului infinit



# Problema echivalentă

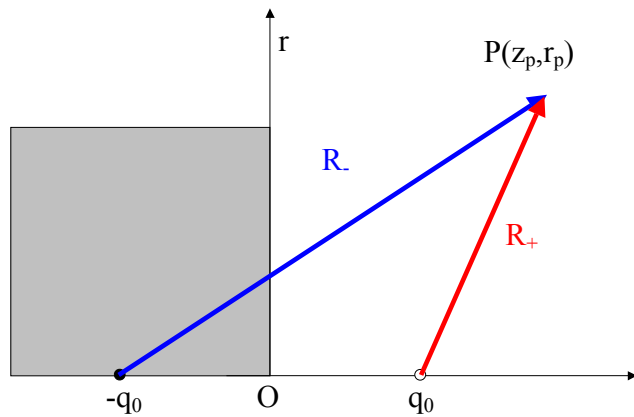


## Soluția celor două probleme ...



Când  $R_0$  tinde la infinit ...

# Câmpul și potențialul



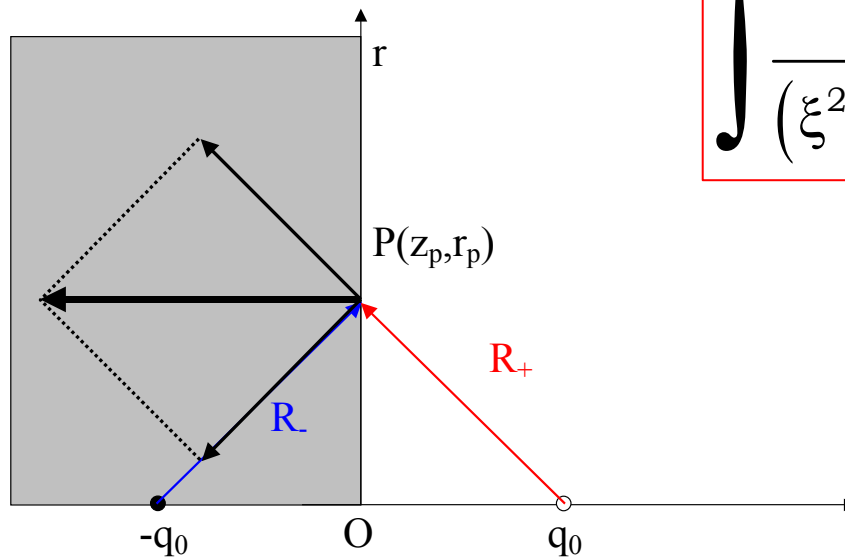
$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{R}_+}{R_+^3} - \frac{\vec{R}_-}{R_-^3} \right)$$

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right)$$

$$\vec{R}_\pm = r_p \vec{u}_r + (z_p \mp d) \vec{k}$$

$$R_\pm = \sqrt{r_p^2 + (z_p \mp d)^2}$$

# Densitatea de sarcină de influență

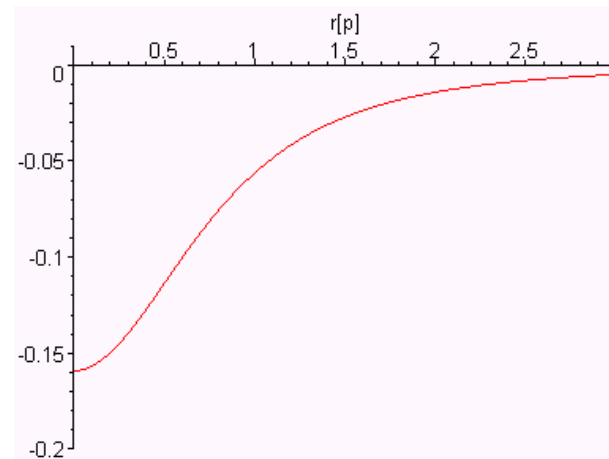
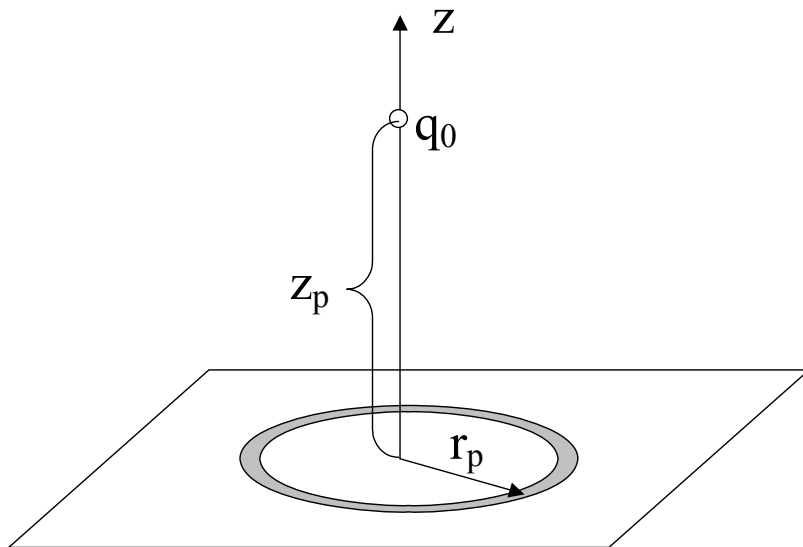


$$\int \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

$$\sigma_i = \varepsilon_0 E_z|_{z=0} = \sigma_i(r) = -2\varepsilon_0 \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{(r_p^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$Q_i = \int_0^\infty \sigma_i 2\pi r_p dr_p = -q_0 d \int_0^\infty \frac{r_p dr_p}{(r_p^2 + d^2)^{3/2}} = -q_0 d \left( -\frac{1}{\sqrt{r_p^2 + d^2}} \right) \Bigg|_0^\infty = -q_0$$

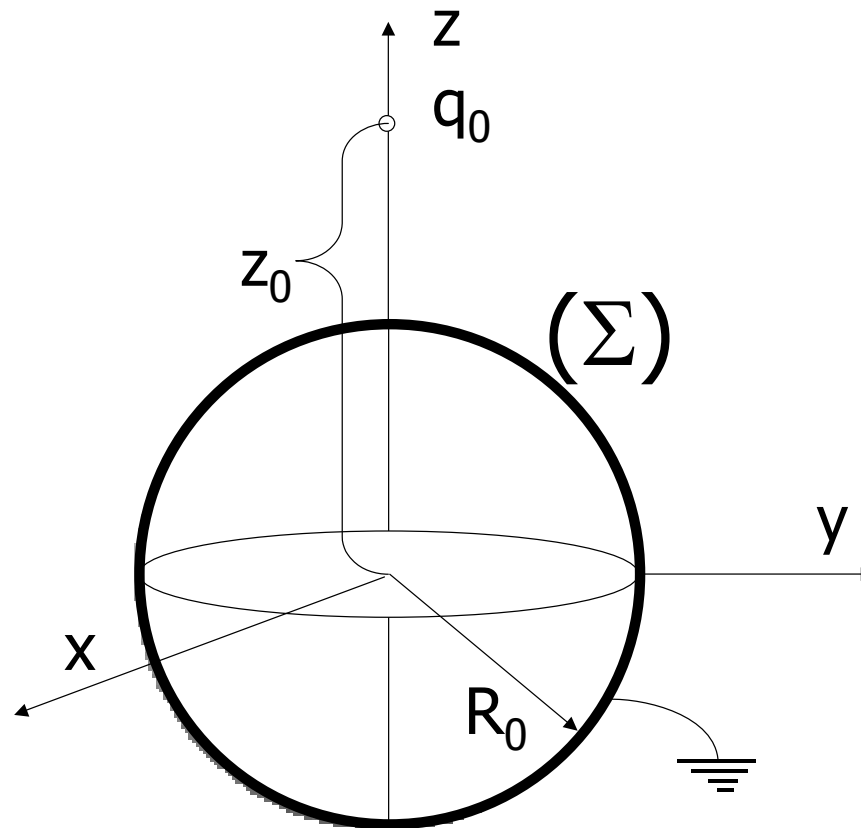
# Densitatea de sarcină



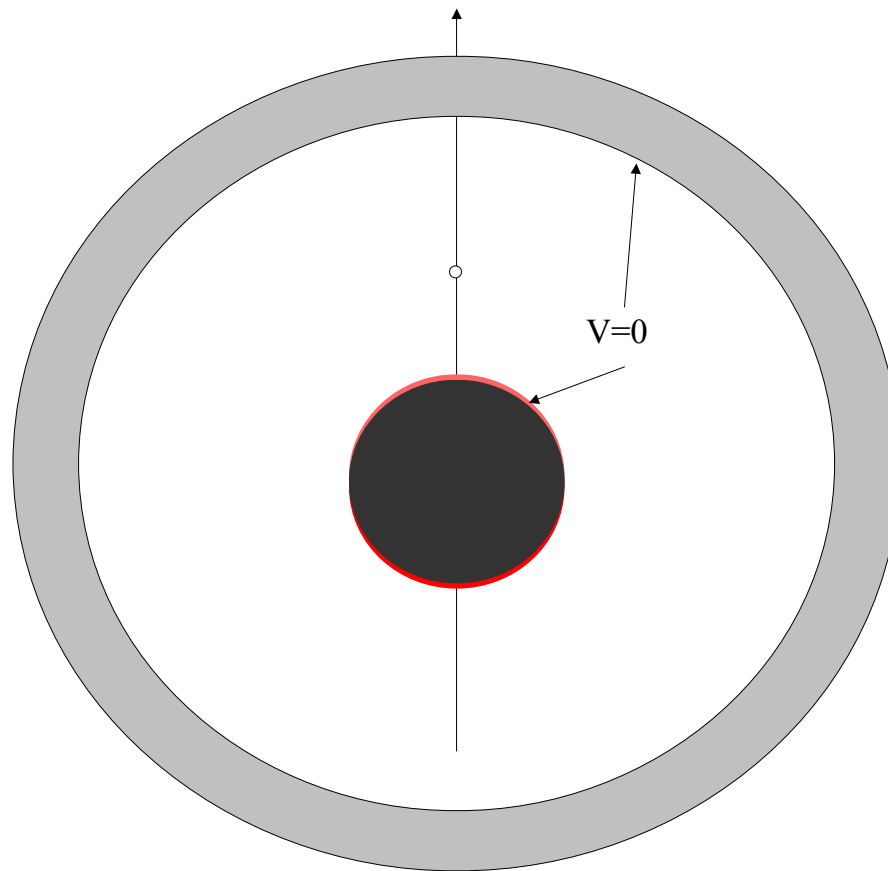
Sarcina de influență totală este  $-q_0$



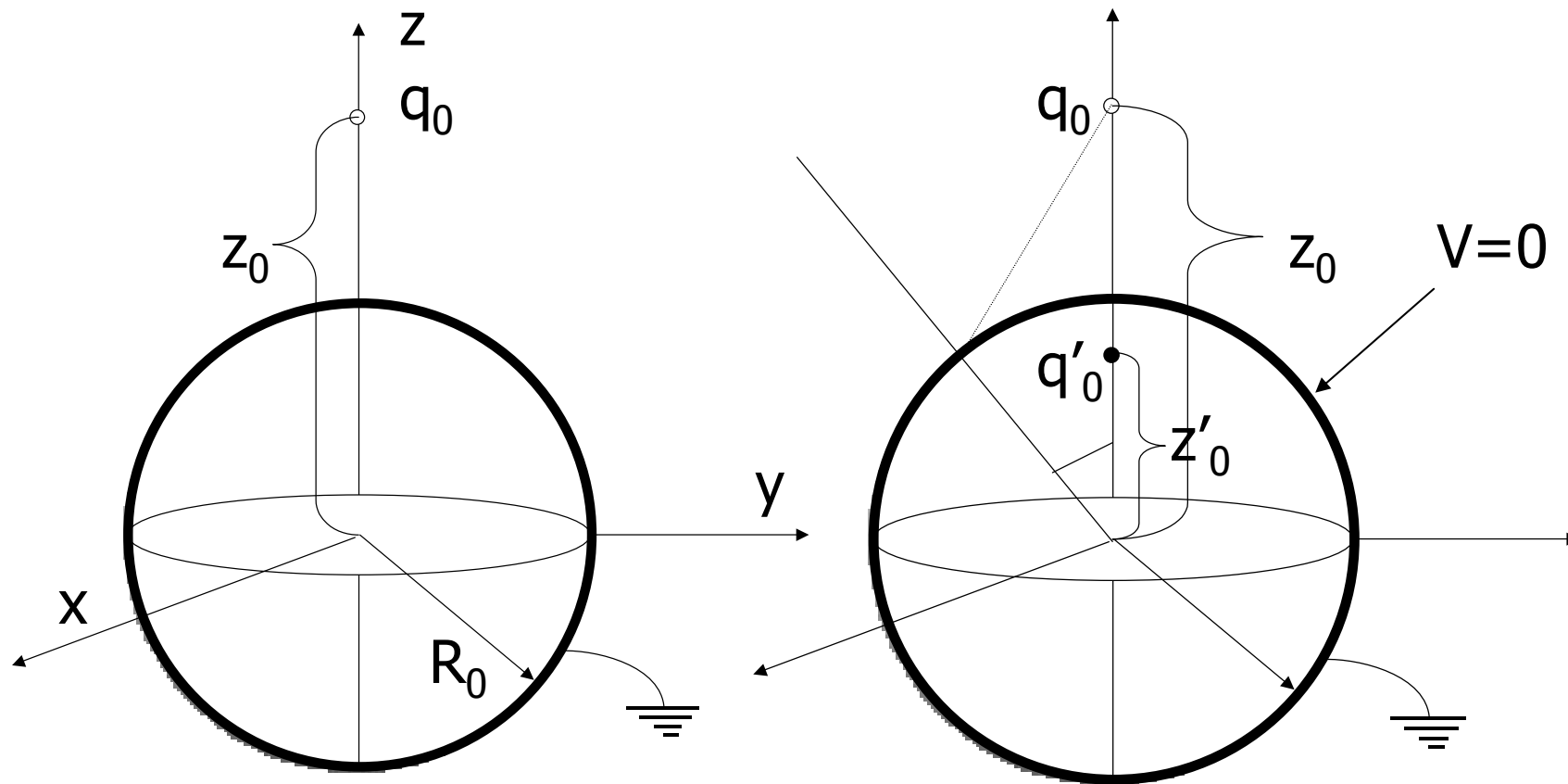
# Sfera conductoare. Cazul I



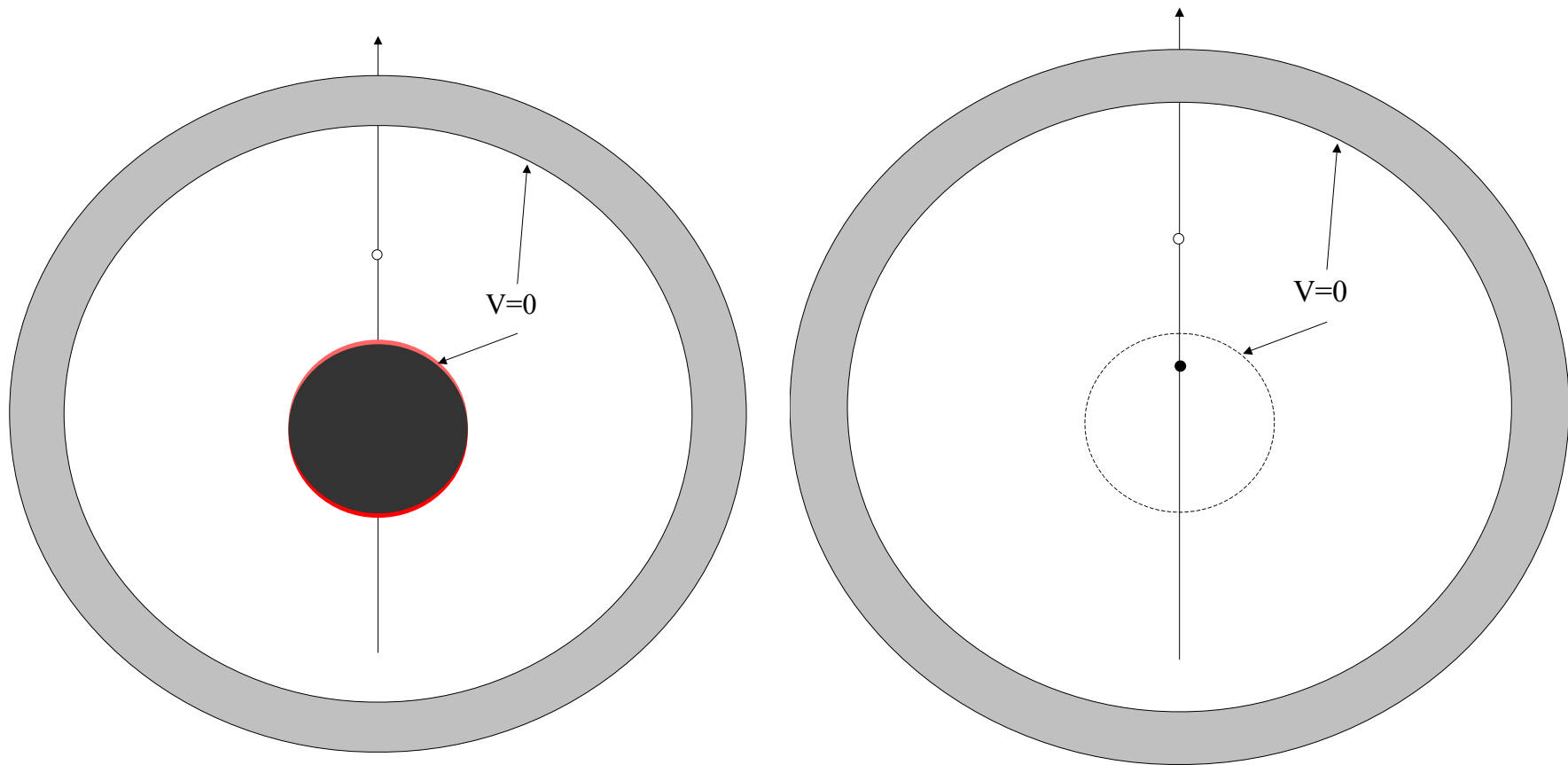
# Problema



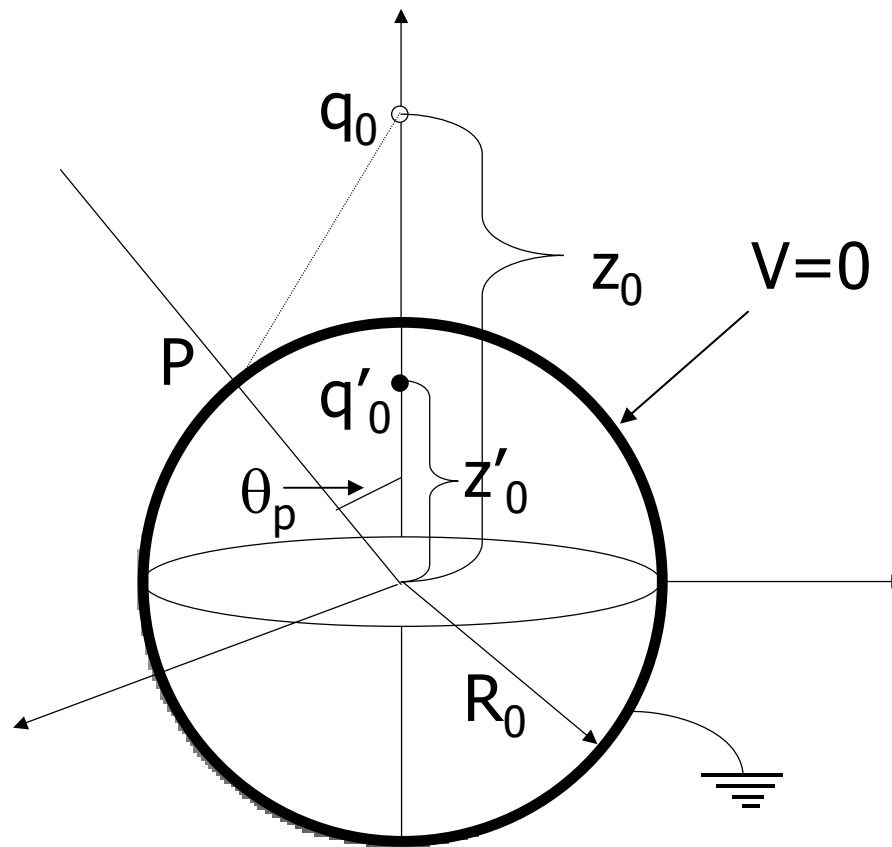
# Problema echivalentă



# Problemele echivalente



# Calcul



# Continuare

$$V = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + z_0^2 - 2R_0 z_0 \cos \theta_p}} + \frac{q_0'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + z_0'^2 - 2R_0 z_0' \cos \theta_p}} = 0, \forall \theta_p$$

$$\Rightarrow q_0^2 (R_0^2 + z_0'^2 - 2R_0 z_0' \cos \theta_p) = q_0'^2 (R_0^2 + z_0^2 - 2R_0 z_0 \cos \theta_p)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_0^2 z_0' = q_0'^2 z_0 \\ q_0^2 (R_0^2 + z_0'^2) = q_0'^2 (R_0^2 + z_0^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_0' = -q_0 \frac{R_0}{z_0} \\ z_0' = \frac{R_0^2}{z_0} \end{cases}$$

# Probleme

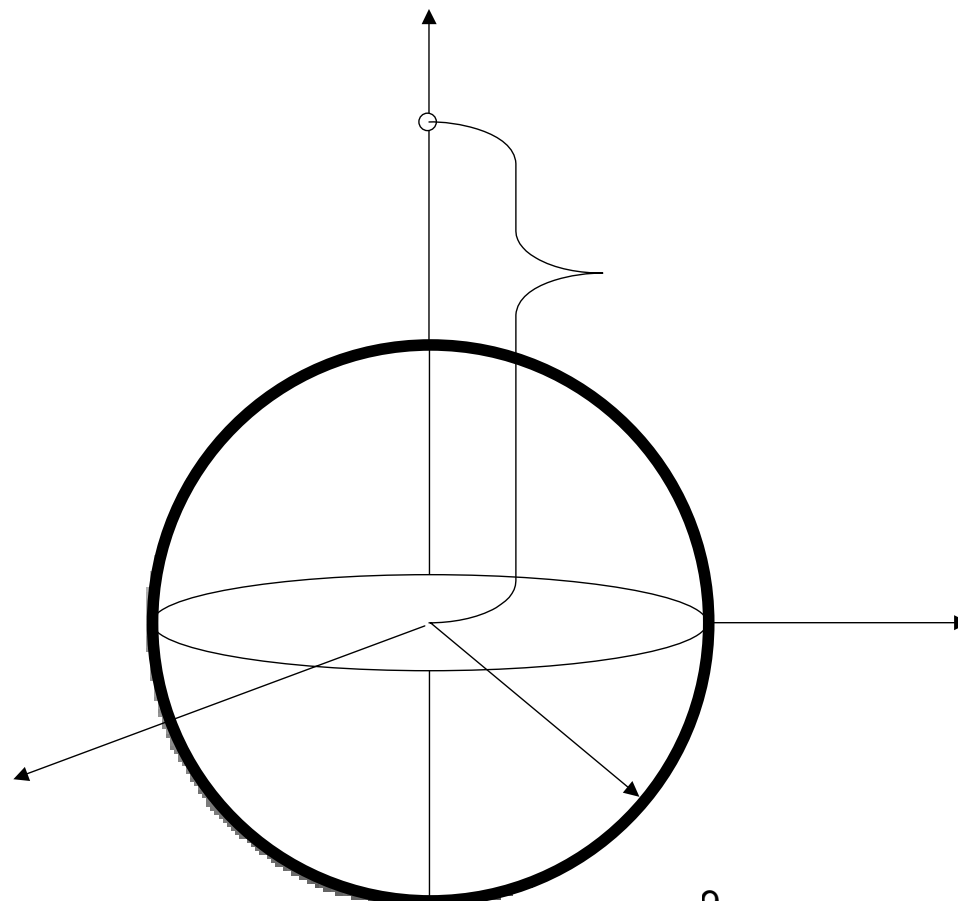
$$\sigma_i = \varepsilon_0 E_R|_{(\Sigma)}$$

Demonstrați !!!

$$Q_i = \int_0^\pi \sigma_i(\theta) 2\pi R_0^2 \sin \theta_p d\theta_p = q'_0$$

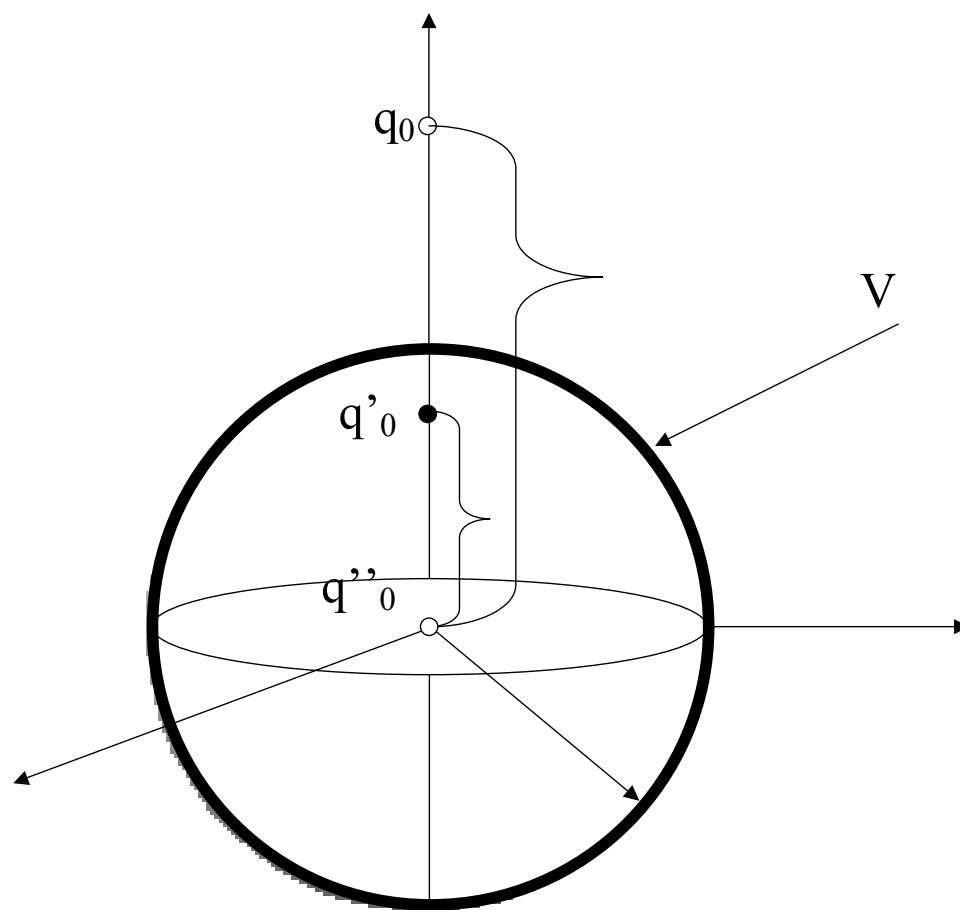
Puteți demonstra SIMPLU utilizând teorema lui Gauss sau prin integrare directă.

# Sfera izolată



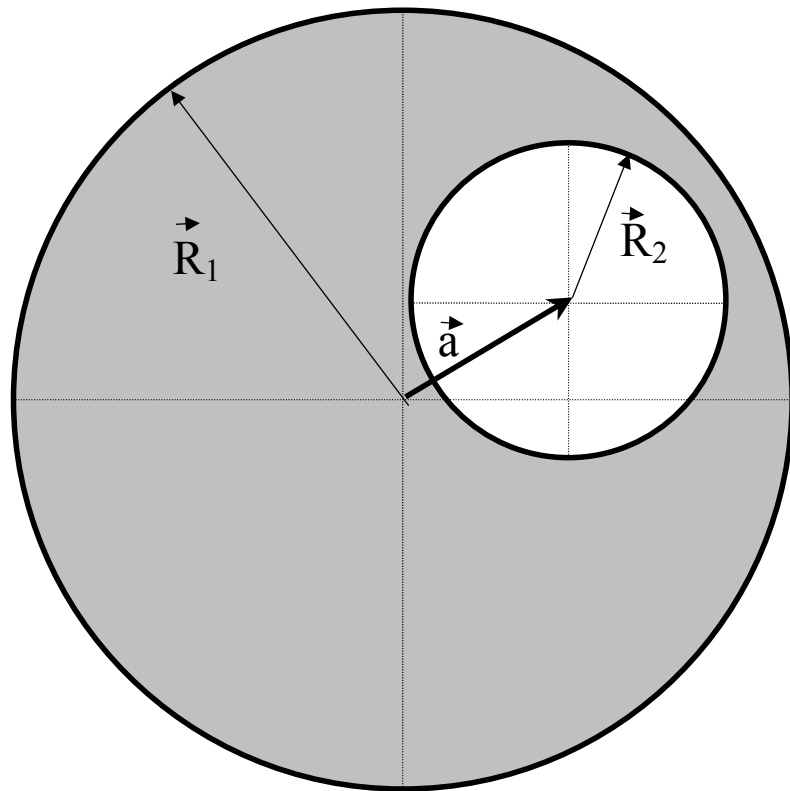


# Cazul sferei izolate



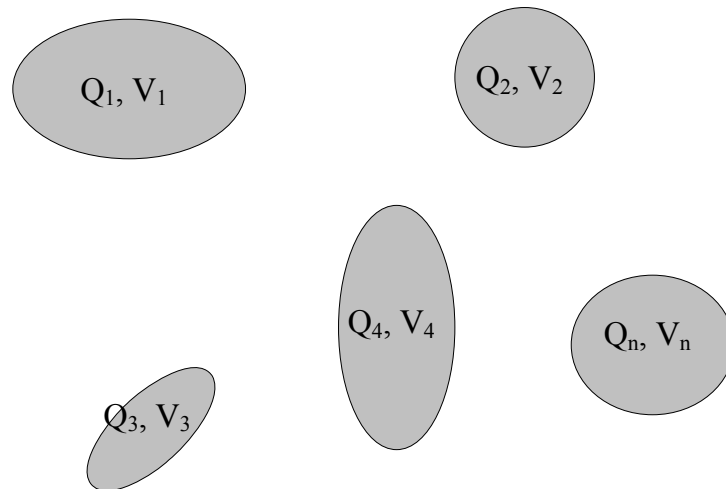
$$q''_0 = -q'_0 = q_0 \frac{R_0}{z_0}$$

# Problemă

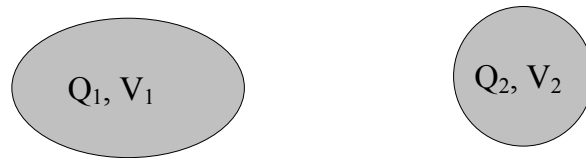


Să se calculeze câmpul într-o cavitate sferică de rază  $R_2$  inclusă într-o sferă de rază  $R_1$  dacă distanța dintre centre este  $a$ . Sfera de rază  $R_1$  din care se decupează sfera de rază  $R_2$  este încărcată uniform cu sarcini electrice uniform distribuite în volum cu densitatea  $\rho$ .

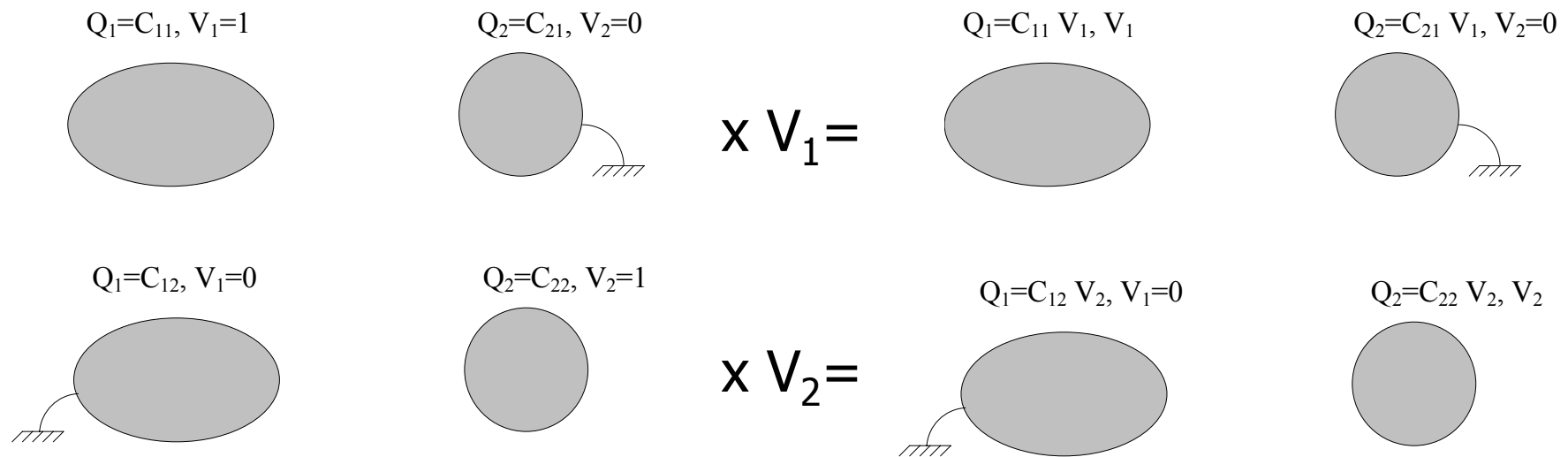
# Sisteme de conductori



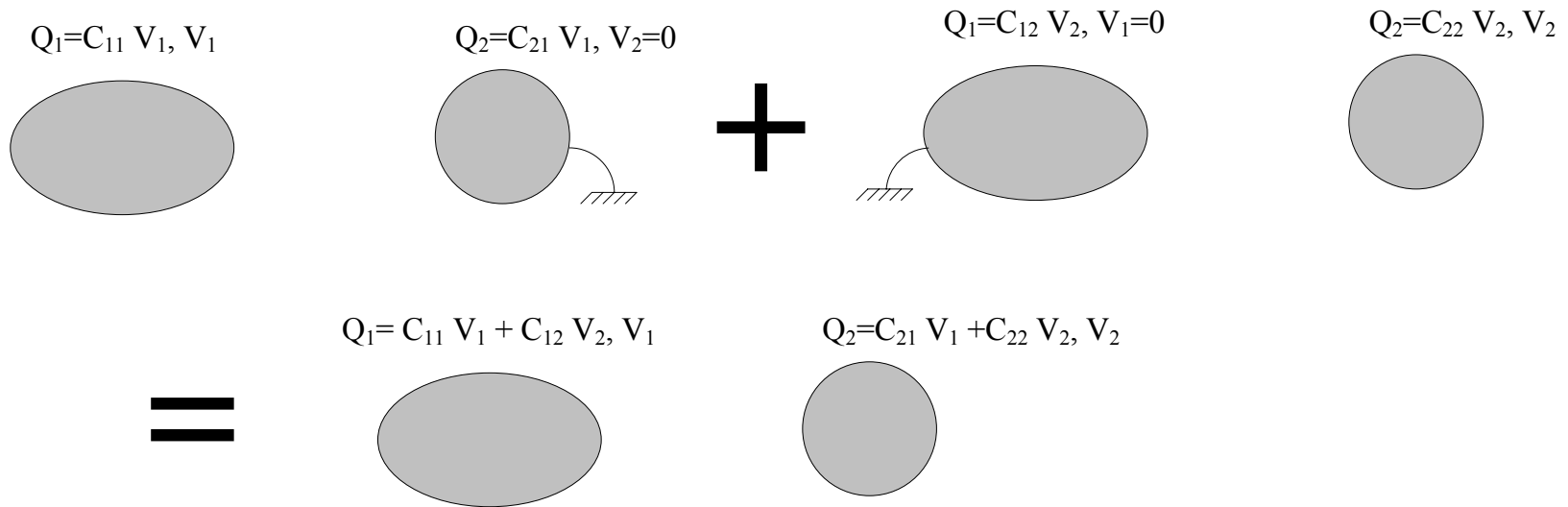
## 2 conductori



### Principiul superpoziției



## 2 conductori



$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases}$$

prof.dr. Alexandru STANCU 2009

# Condensatorul

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}$$

**Condensator** = sistem format din două conductoare izolate între ele și încărcate cu sarcini egale și de semne contrare.

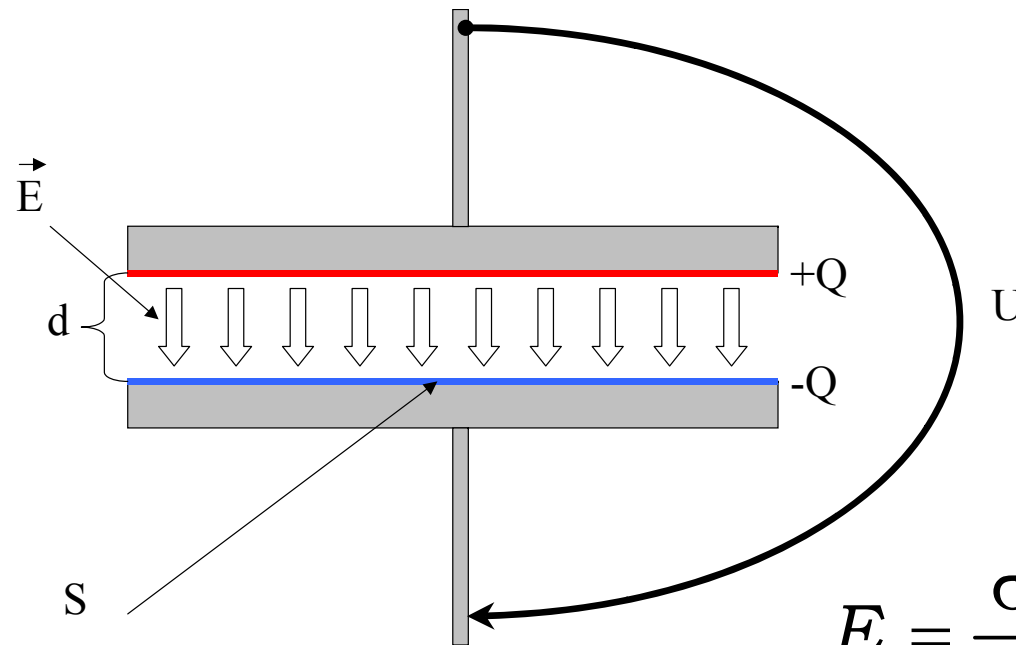
# Condensatorul

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases}, Q_1 = Q; Q_2 = -Q$$

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q - p_{12}Q \\ V_2 = p_{21}Q - p_{22}Q \end{cases}$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{(p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})}$$

## Condensatorul plan

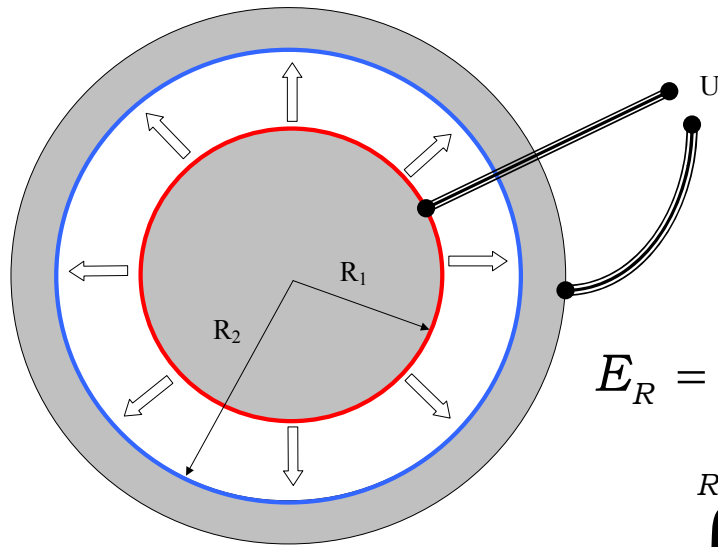


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{U}{d}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



# Condensatorul sferic



$$E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E_R dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

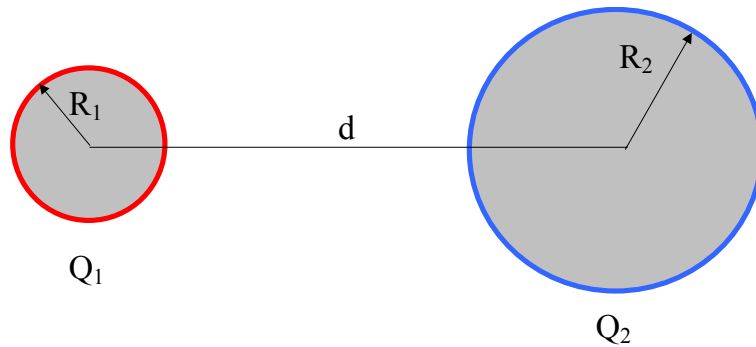
# Condensatorul cilindric

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

# Sistem de două conductoare sferice



$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$p_{12} = p_{21} = 0$$

# Continuare

$$\begin{cases} V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{cases}$$

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 d}$$

$$\begin{cases} Q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{d^2 R_1}{d^2 - R_1 R_2} V_1 - 4\pi\epsilon_0 \frac{d R_1 R_2}{d^2 - R_1 R_2} V_2 \\ Q_2 = -4\pi\epsilon_0 \frac{d R_1 R_2}{d^2 - R_1 R_2} V_1 + 4\pi\epsilon_0 \frac{d^2 R_2}{d^2 - R_1 R_2} V_2 \end{cases}$$

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{d^2 R_1}{d^2 - R_1 R_2}$$

$$C_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{d^2 R_2}{d^2 - R_1 R_2}$$

$$C_{12} = C_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{d R_1 R_2}{d^2 - R_1 R_2}$$

# Energia

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i$$

$$n = 2$$

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

$$W = \frac{Q}{2} (V_1 - V_2) = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

$$U = Ed$$

$$W = \frac{\epsilon_0 S}{2d} (Ed)^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} v$$

# Lucrul mecanic ( $Q=\text{const.}$ )

$$Q = \text{const.}$$

$$Fdx = -dW = -d\left(\frac{Q^2}{2C}\right)$$

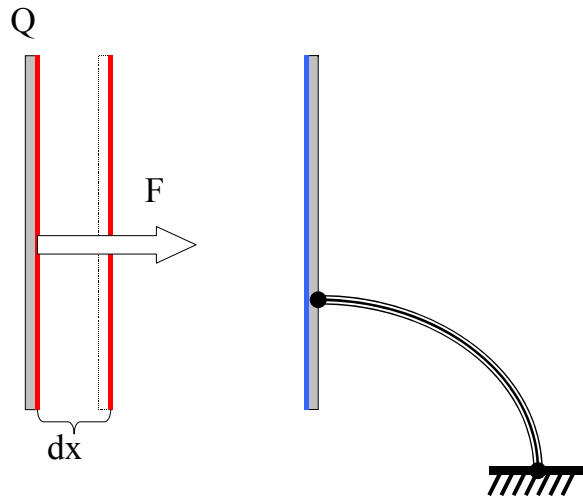
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x}$$

$$dW = d\left(\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} x\right)$$

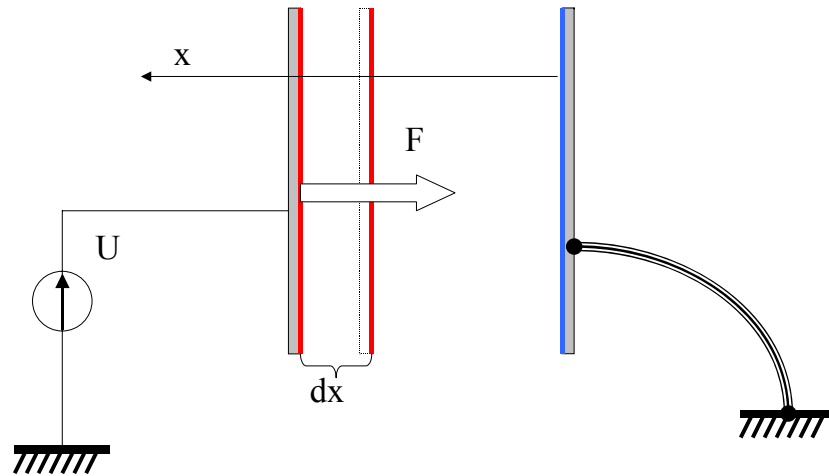
$$Fdx = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} dx$$

$$F = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = -Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -QE_s$$

$$F = -pS = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S$$



$$U = \text{const.}$$



$$U = \text{const.}$$

$$U (UdC) = Fdx + \frac{U^2 dC}{2}$$

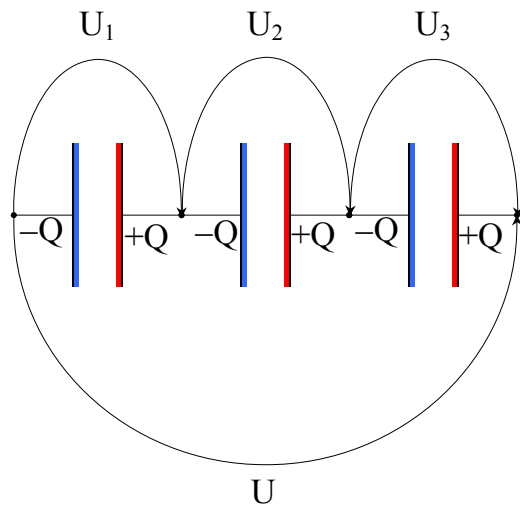
$$Fdx = \frac{U^2 dC}{2}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{x}$$

$$Fdx = \frac{U^2}{2} d\left(\frac{\epsilon_0 S}{x}\right) = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2x^2} dx$$

$$F = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2x^2}$$

# Gruparea condensatoarelor (in serie)



$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q}{C_{echivalent}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \Rightarrow$$

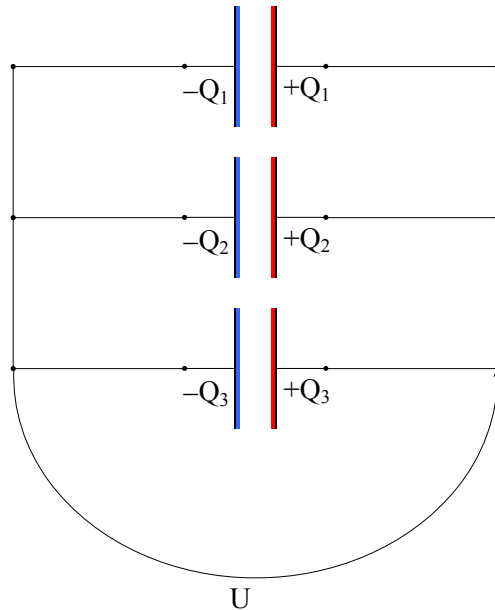
$$\Rightarrow \frac{1}{C_{echivalent}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$



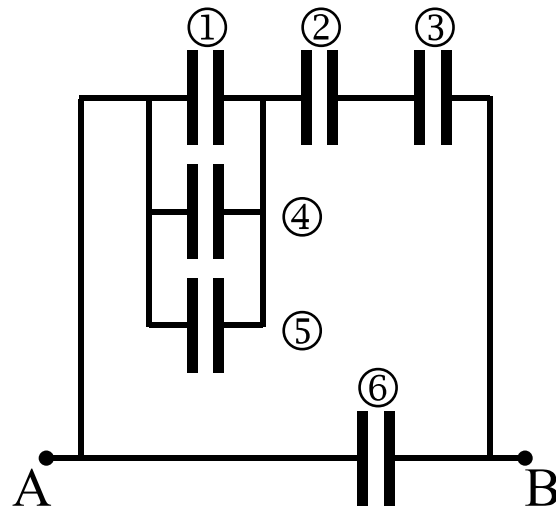
## Gruparea condensatoarelor (in paralel)

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_{echivalent} U = C_1 U + C_2 U + C_3 U \Rightarrow \\ \Rightarrow C_{echivalent} = C_1 + C_2 + C_3$$



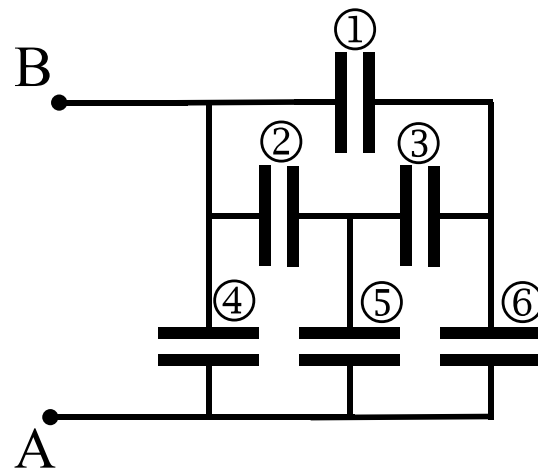
$$C_p = \sum_{i=1}^n C_i$$

## Problema 9.1



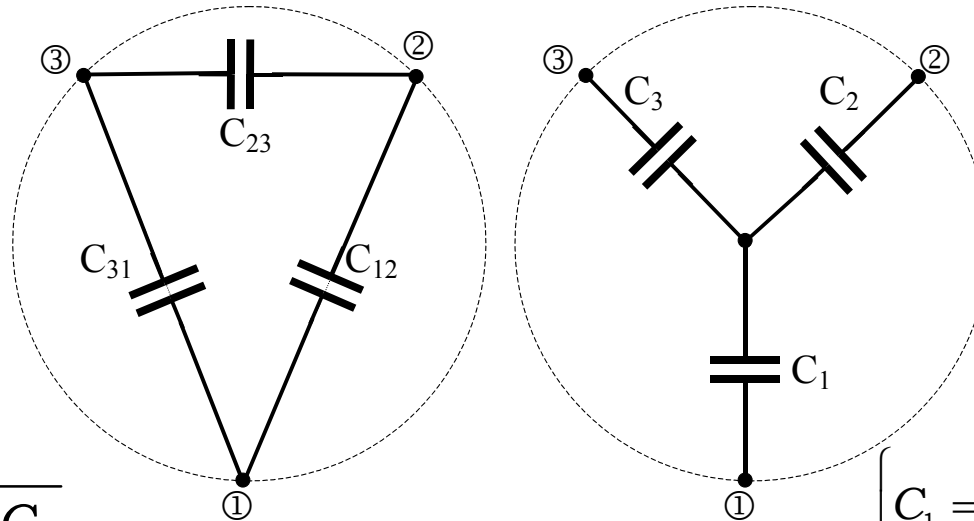
Să se calculeze capacitatea echivalentă între punctele A și B.  
Toate condensatoarele au capacitatea cunoscută  $C$ .

## Problema 9.2



Să se calculeze capacitatea echivalentă între punctele A și B.  
Toate condensatoarele au capacitatea cunoscută  $C$ .

# Transformarea triunghi-stea



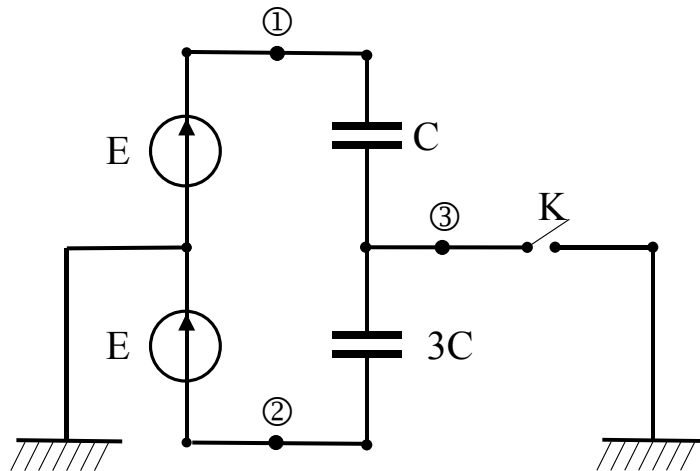
$$\begin{cases} C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}} \\ C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23} C_{12}}{C_{31}} \\ C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31} C_{23}}{C_{12}} \end{cases}$$

## Alte reguli ...

1. Se aplică legea conservării sarcinii în nodurile rețelei
2. Pentru ochiuri de rețea se poate scrie că suma căderilor de tensiune este zero

## Problema 9.3



Să se calculeze sarcinile electrice care traversează punctele 1, 2 și 3 la închiderea întrerupătorului K. Se cunosc  $E$  și  $C$ .

## Medii conductoare

Conductorii sunt corpuri în care mișcarea sarcinilor (curentul electric) apare sub acțiunea câmpului electric.

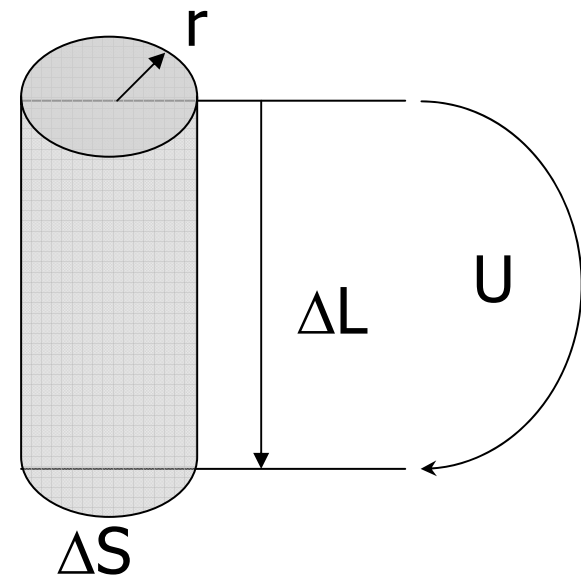
1827 Ohm

$$I = U/R$$

R – rezistența electrică

$$R = \rho \frac{\Delta L}{\Delta S} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta L}{\Delta S}$$

prof.dr. Alexandru STANCU 2009



## Forma diferențială a legii lui Ohm

$$U = RI = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta L}{\Delta S} j \Delta S$$

$$E = \frac{U}{\Delta L} = \frac{j}{\gamma} \Rightarrow \vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

1. Dielectrici  $\gamma < 10^{-5} (\Omega m)^{-1}$
2. Semiconductori  $10^{-5} < \gamma < 10^3 (\Omega m)^{-1}$
3. Conductorii  $10^3 < \gamma (\Omega m)^{-1}$

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



# Rezistivitatea metalelor

rezistivitatea

conductivitatea

|          |   |   |
|----------|---|---|
| Aluminiu | $2.8 \cdot 10^{-8} \text{ } (\Omega\text{m})$ | $3.6 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ |
| Cupru    | $1.7 \cdot 10^{-8} \text{ } (\Omega\text{m})$ | $5.8 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ |
| Fier     | $1.0 \cdot 10^{-7} \text{ } (\Omega\text{m})$ | $1.0 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ |
| Argint   | $1.6 \cdot 10^{-8} \text{ } (\Omega\text{m})$ | $6.2 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ |
| Nichel   | $6.8 \cdot 10^{-8} \text{ } (\Omega\text{m})$ | $1.5 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ |
| Aur      | $2.0 \cdot 10^{-8} \text{ } (\Omega\text{m})$ | $5.0 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ |

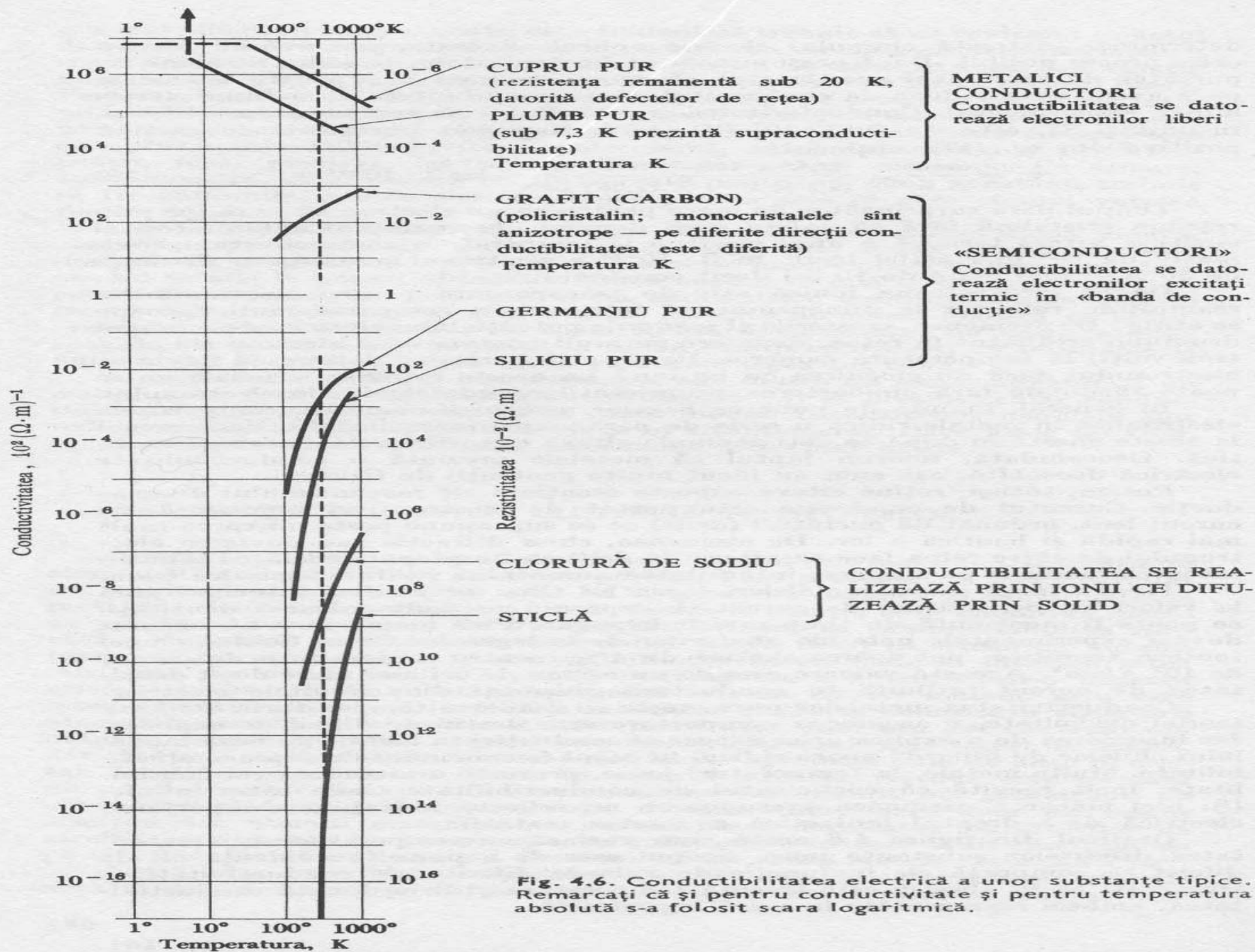


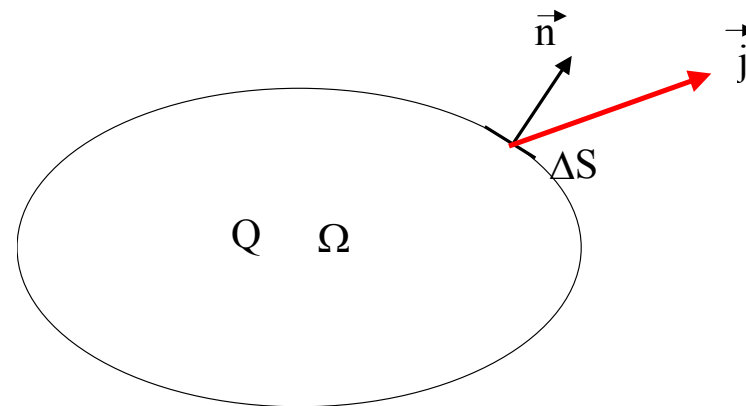
Fig. 4.6. Conductibilitatea electrică a unor substanțe tipice. Remarcați că și pentru conductivitate și pentru temperatura absolută s-a folosit scara logaritmică.

# Ecuatia de continuitate

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_V \text{div } \vec{j} dv$$

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dv = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$



# Timp de relaxare

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\gamma \vec{E}) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad \text{Exemplu: Cu}$$

$$\gamma = 6,0 \cdot 10^7 (\Omega \text{m})^{-1}$$

$$\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\varepsilon_0 / \gamma = 10^{-19} \text{ s (aprox.)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho(0) \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_0} t\right)$$

# Câmpul în interiorul unui conductor

În electrostatică  $E=0$  în interiorul conductorilor.

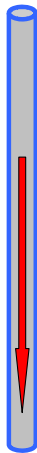
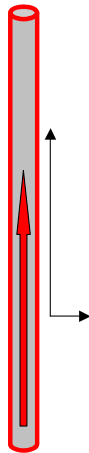
Când există curenți electrici în conductori, câmpul electric este diferit de zero.

# Câmpul electric în cazul c.c.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \vec{j} \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0$$

Simplificare:

Conductori liniari filiformi



Câmpul electric are componentă tangențială dar și normală la suprafața conductorului parcurs de curent

# Sarcini de suprafață și de volum

Sarcinile de suprafață sunt sursele câmpului care există în conductor și care asigură curentul în acesta.

Sarcinile de volum ... conductori neomogeni!

# Mecanismul de generare a curenților

Sursa de tensiune electromotoare

- separă sarcinile pozitive de cele negative
- sarcinile de la bornele sursei nu creează direct câmpul electric în conductori dar asigură formarea unei distribuții a sarcinilor pe conductori care să realizeze câmpul electric în interiorul acestora.



## Modificarea potențialului în lungul conductorului

$$\vec{j} \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0$$

Potențialul nu mai este constant într-un conductor!

TOTUȘI, câmpul în interiorul conductorului este creat de sarcini de suprafață care nu își schimbă densitatea în timp. Consecința este că acest câmp este câmp potențial.

# Legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit

$$V(1) - V(2) = El = U_{12}$$

$$j = \gamma E \Rightarrow E = \frac{j}{\gamma} = \frac{jS}{\gamma S} = \frac{I}{\gamma S}$$

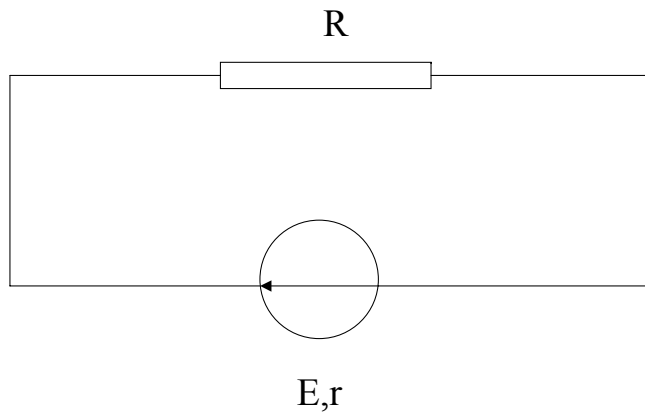
$$U_{12} = \frac{I}{\gamma S} l = IR_{12}$$

# Originea câmpului electromotor

Câmpul electric electromotor nu poate fi tot de origine electrostatică.

Dacă ar fi așa, lucrul mecanic al forței electrice de-a lungul unui contur închis ar fi nul.

# Legea lui Ohm pentru un circuit simplu



$$E = RI + rI \Rightarrow I = \frac{E}{R + r}$$

# Efectul termic al curentului electric

$$dL = U dQ$$

$$dQ = Idt$$

$$dL = UI dt$$

$$P = \frac{dL}{dt} = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

$$\Delta P = (j\Delta S)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S} \Rightarrow P_V = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta l} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2 = \vec{j} \cdot \vec{E}$$



Forma locală

# Circuite electrice. Legile lui Kirchhoff.

Circuite electrice...

Noduri ale rețelei (n)

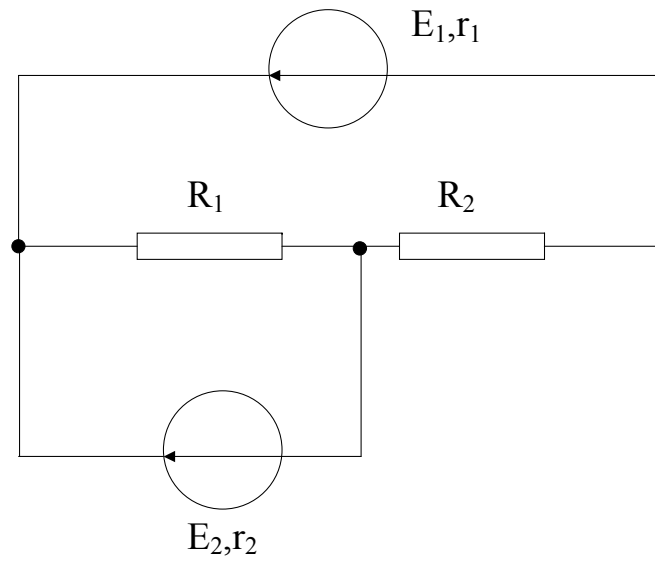
Laturi ale rețelei (l)

$$\begin{cases} \sum I_k = 0 \\ \sum R_k I_k = \sum e_k \end{cases}$$

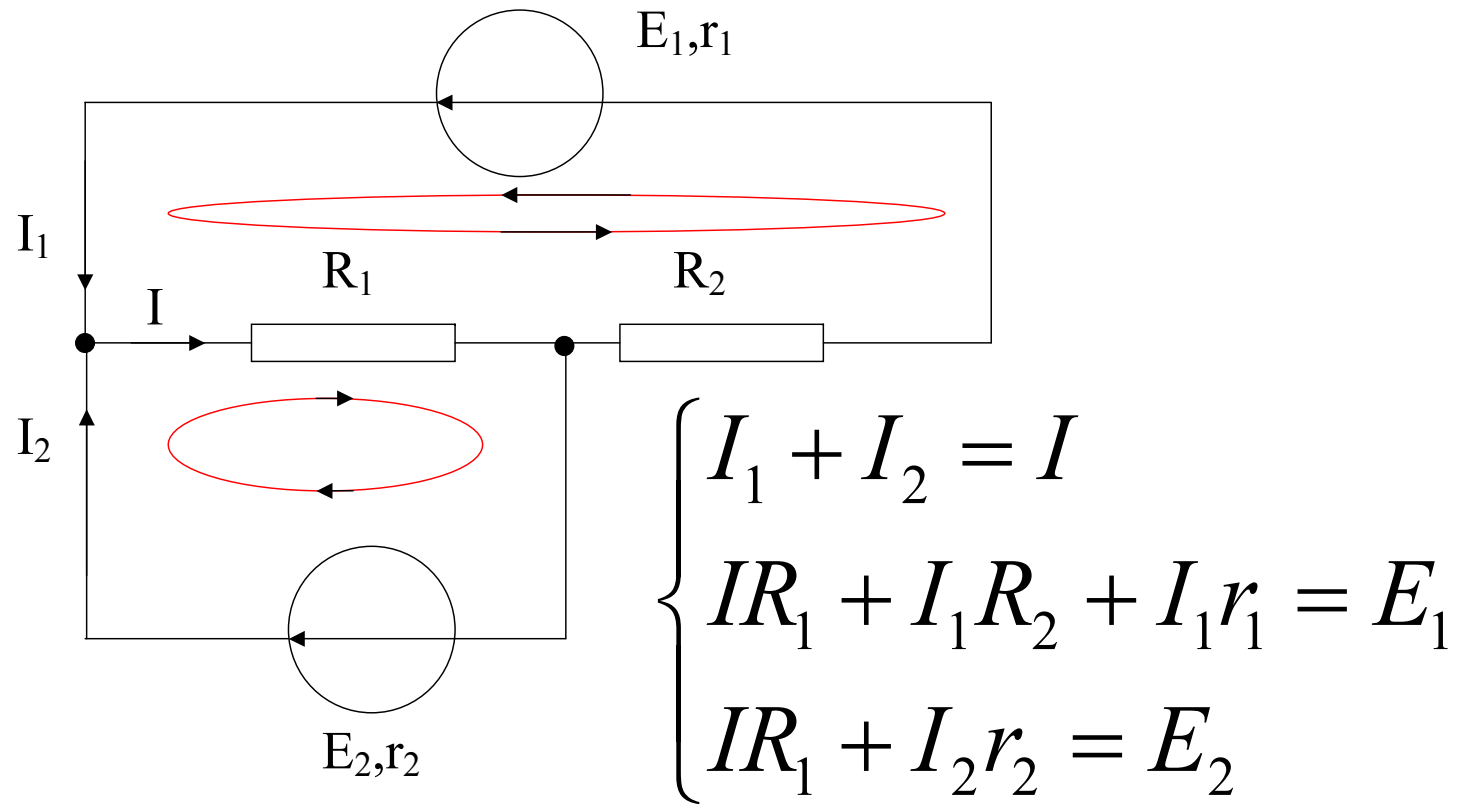
K1...pentru noduri (n-1 ecuații)

K2...pentru ochiuri de rețea (l-n+1 ecuații)

# Exemplu

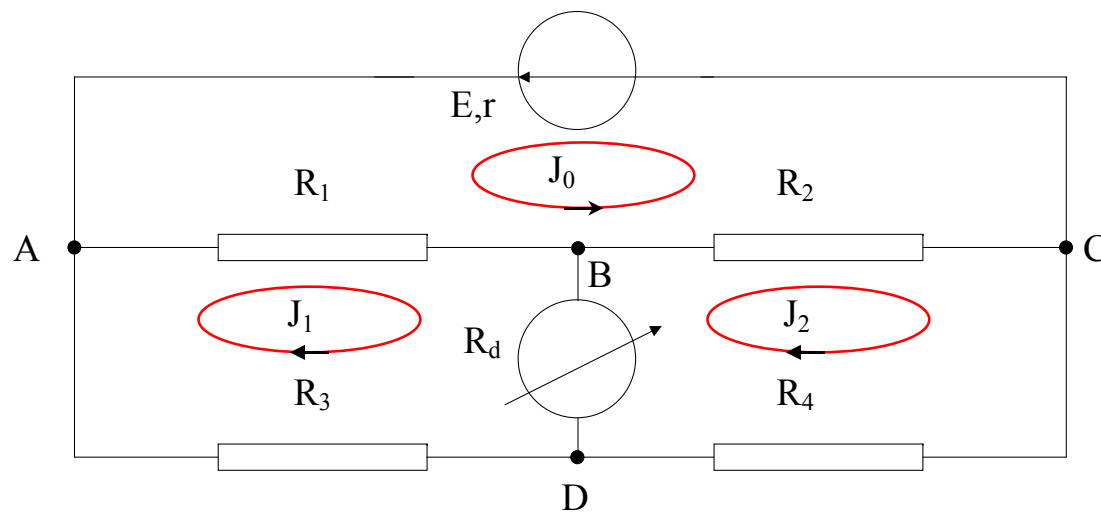


# Exemplu





# Metoda curenților pe ochiuri



$$I_r = J_0$$

$$I_{AB} = J_0 + J_1$$

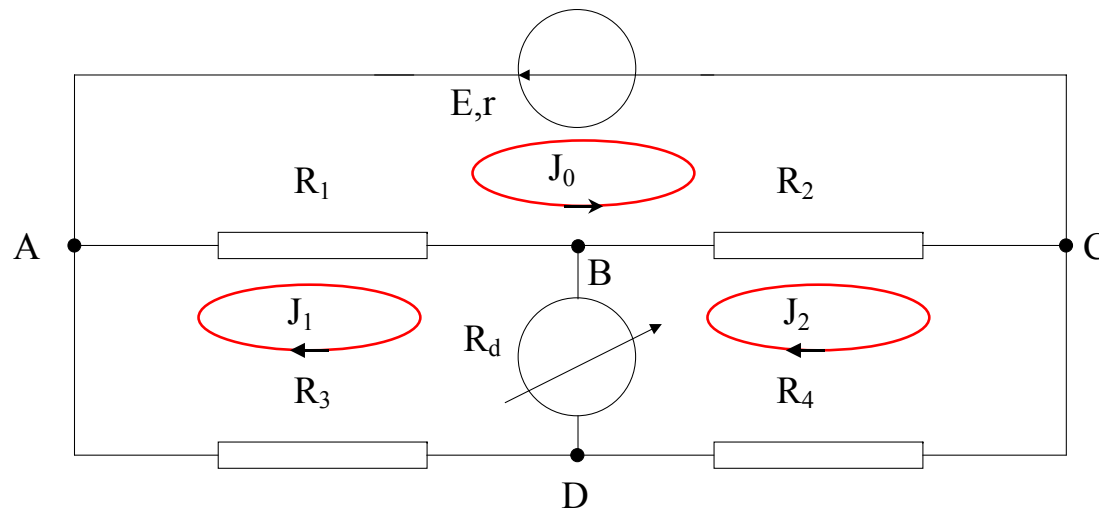
$$I_{BC} = J_0 + J_2$$

$$I_{DA} = J_1$$

$$I_{CD} = J_2$$

$$I_{BD} = J_1 - J_2$$

# Metoda curenților pe ochiuri



$$\begin{cases} J_0 (r + R_1 + R_2) + J_1 R_1 + J_2 R_2 = E \\ J_0 R_1 + J_1 (R_1 + R_3 + R_d) - J_2 R_d = 0 \\ J_0 R_2 - J_1 R_d + J_2 (R_2 + R_4 + R_d) = 0 \end{cases}$$

## Continuare

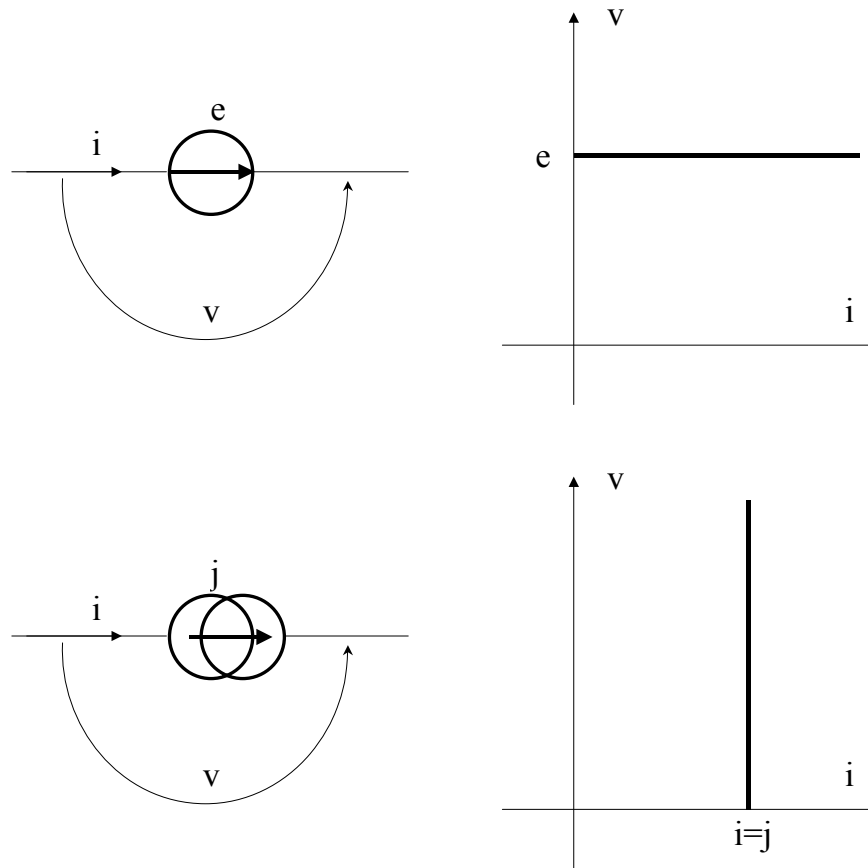
$$\begin{cases} J_0 (r + R_1 + R_2) + J_1 R_1 + J_2 R_2 = E \\ J_0 R_1 + J_1 (R_1 + R_3 + R_d) - J_2 R_d = 0 \\ J_0 R_2 - J_1 R_d + J_2 (R_2 + R_4 + R_d) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (r + R_1 + R_2) & R_1 & R_2 \\ R_1 & (R_1 + R_3 + R_d) & -R_d \\ R_2 & -R_d & (R_2 + R_4 + R_d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este adaptabilă pentru punerea automată în ecuație.

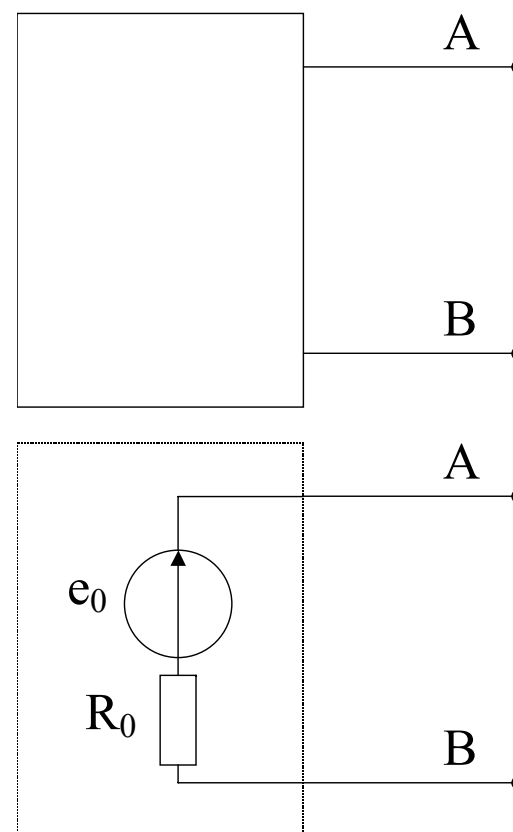
Principiul superpoziției stărilor de echilibru.

# Sursa de tensiune, sursa de curent

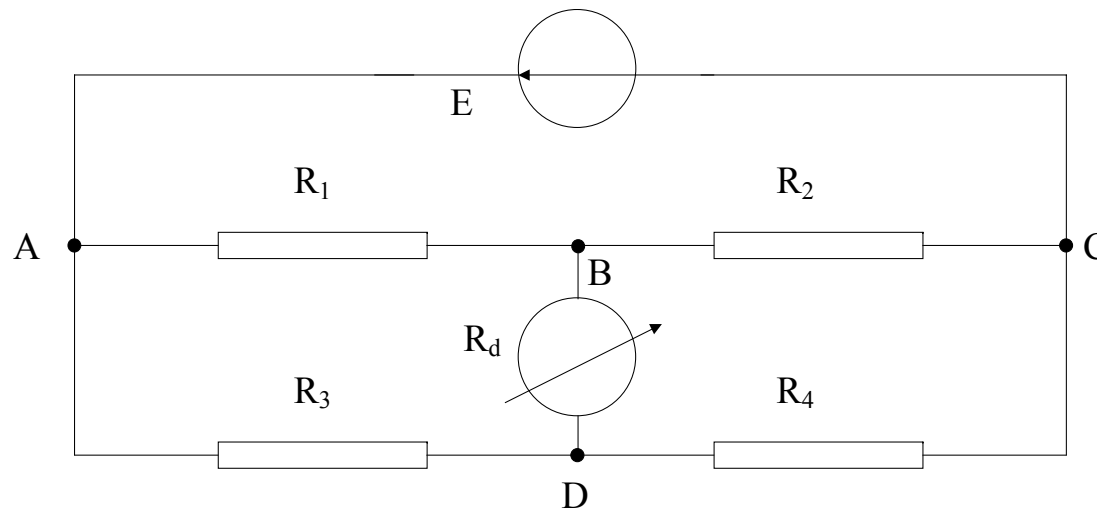


# Teorema lui Thévenin

O rețea liniară văzută din două dintre nodurile sale, A și B, este echivalentă cu un generator de tensiune cu tensiune electromotoare egală cu tensiunea în gol între A și B și de rezistență internă egală cu rezistența rețelei între A și B.

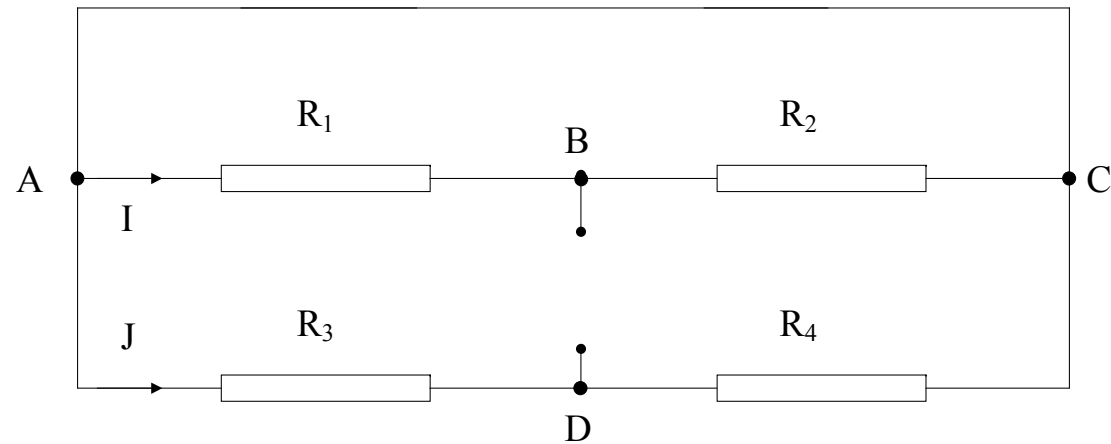


# Exemplu de calcul



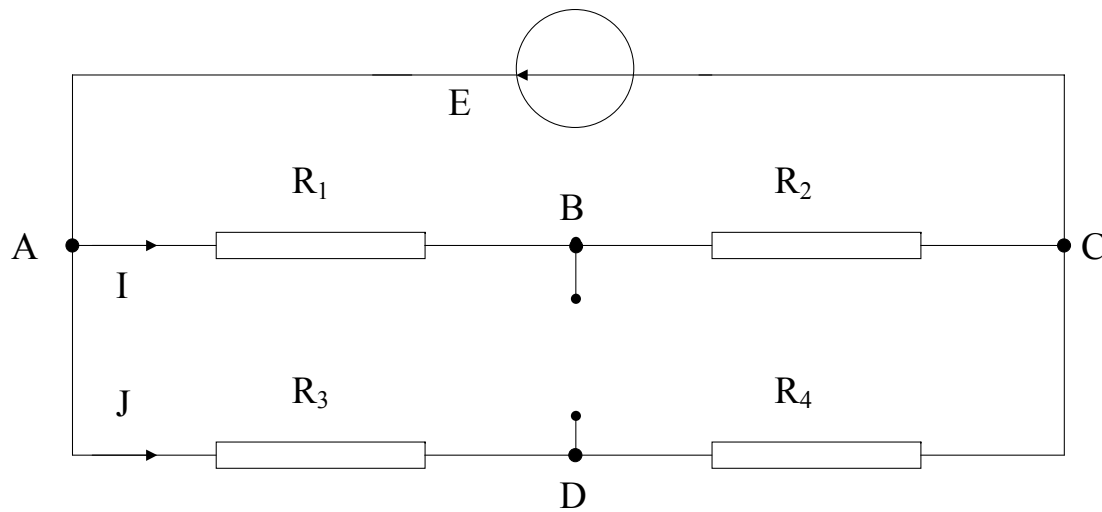
Să se calculeze curentul prin  $R_d$  folosind teorema lui Thévenin.

# Calcul



$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

# Calcul



$$e_0 = V_B - V_D = (-IR_1) - (-JR_3)$$

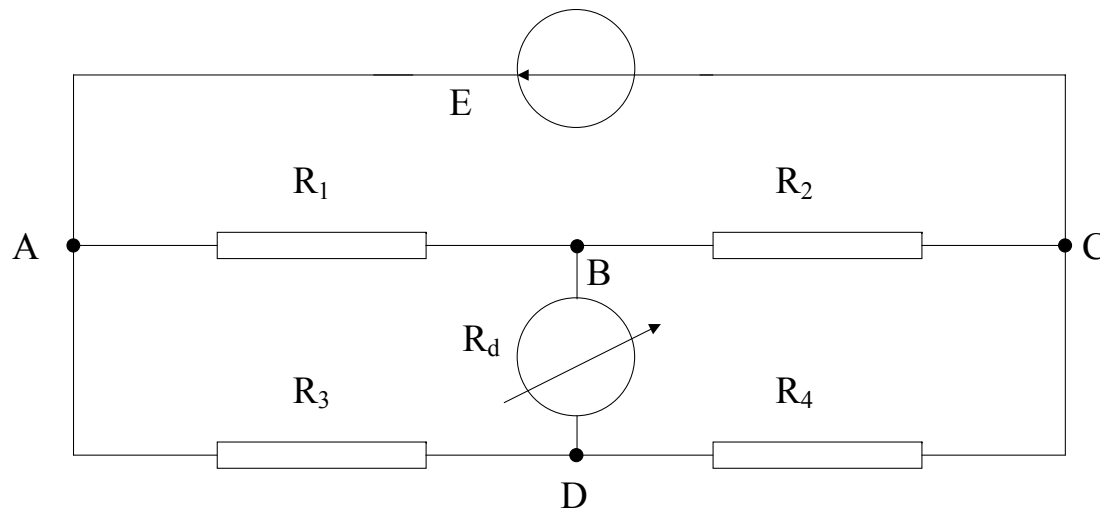
$$I = \frac{e}{R_1 + R_2}$$

$$J = \frac{e}{R_3 + R_4}$$

$$e_0 = e \frac{-R_1 R_4 + R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$



# Rezultat



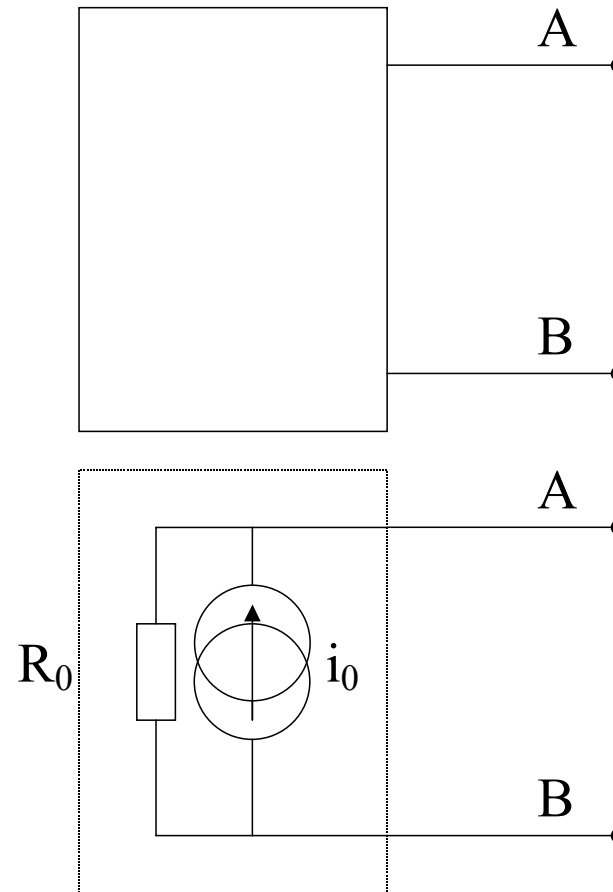
$$i = \frac{e_0}{R_0 + R_d}$$

$$e_0 = e \frac{-R_1 R_4 + R_2 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

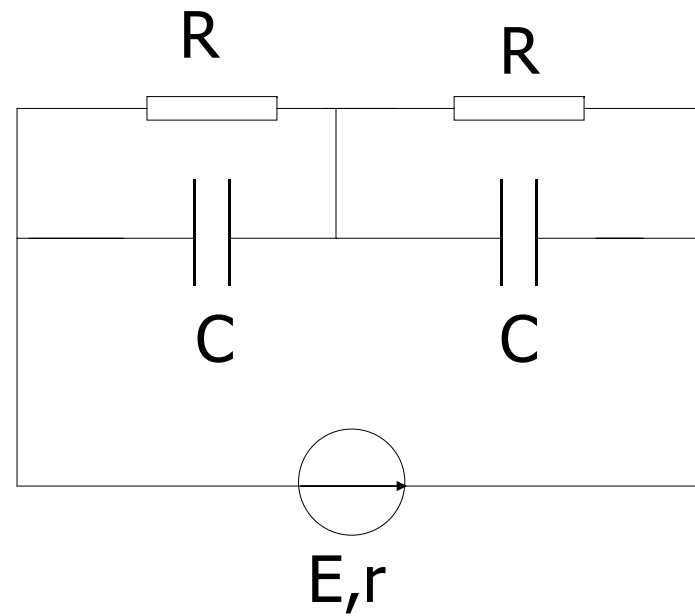
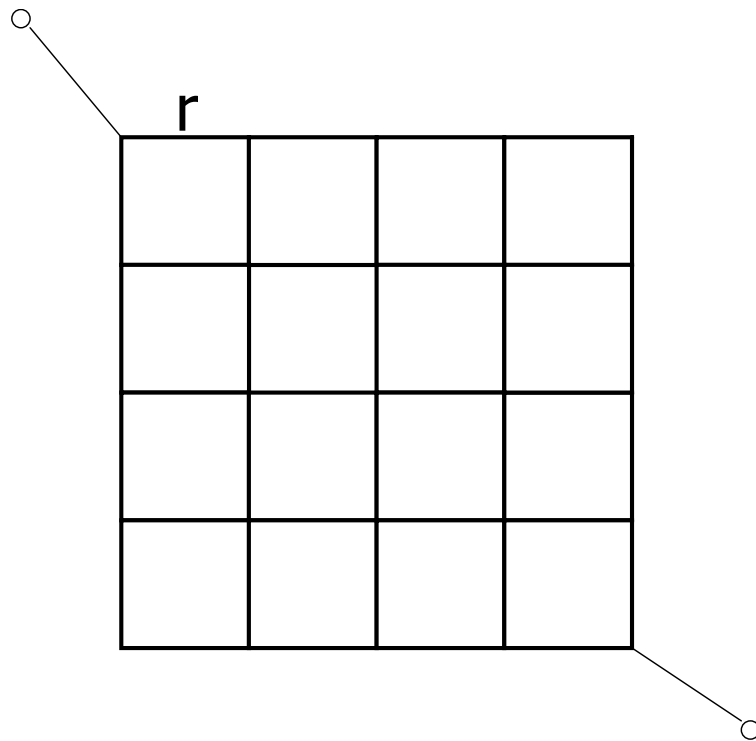
$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

# Teorema lui Norton

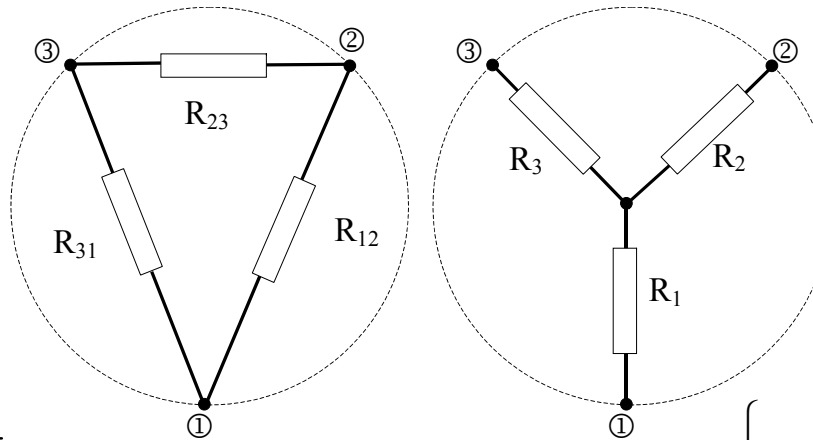
O rețea liniară văzută din două dintre nodurile sale, A și B, este echivalentă cu un generator de curent de intensitate egală cu cea în scurtcircuit între A și B legat în paralel cu o rezistență internă egală cu rezistența rețelei între A și B.



# Probleme



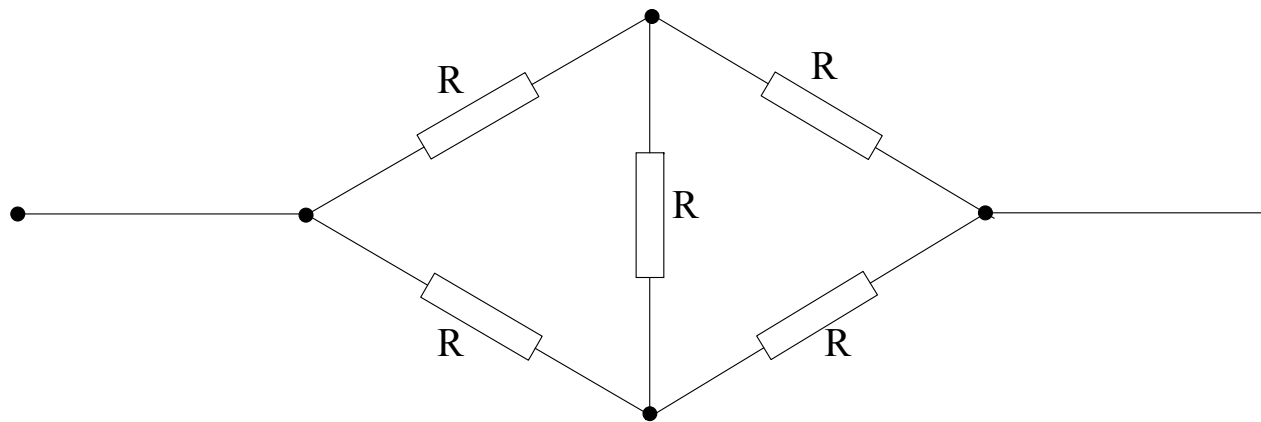
# Transformarea triunghi-stea



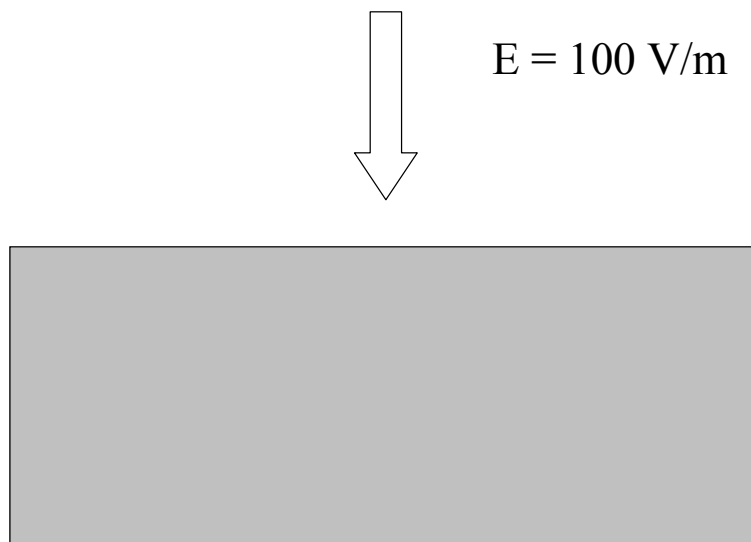
$$\begin{cases} R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3} \\ R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2} \end{cases}$$

# Problema 1



# Electricitatea în atmosferă

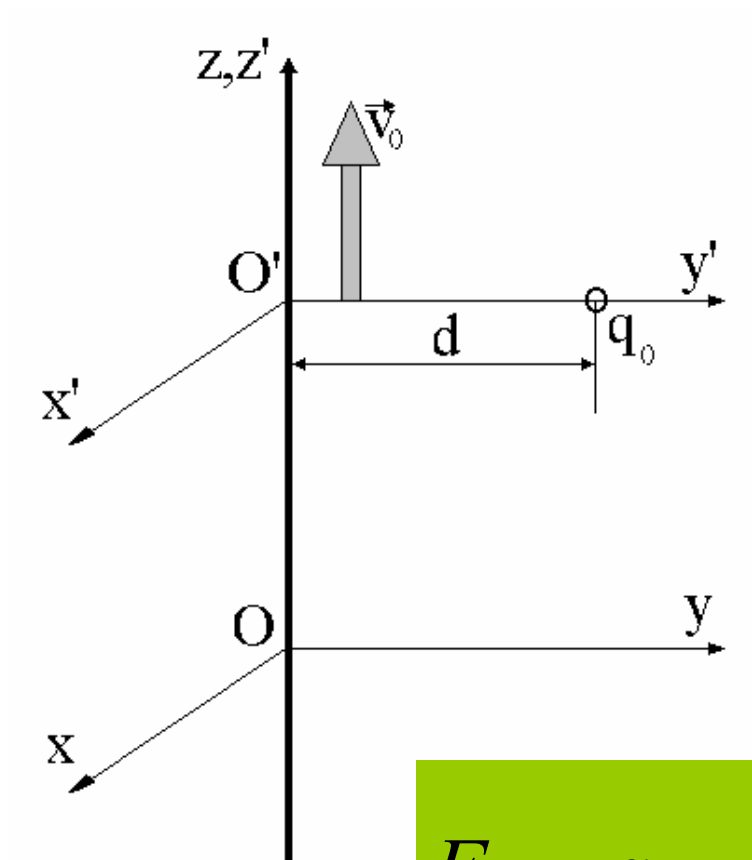


# Electricitatea în atmosferă

- Diferența de potențial totală între suprafața pământului și limita superioară a atmosferei este de 400 kV
- Densitatea de curent  $10^{-12}$  A/m<sup>2</sup>
- Curentul total 1800 A (spre suprafața pământului)
- Ionosfera se află la aprox. 50 km
- Furtunile (trăsnetele) aduc sarcinile negative pe pământ
- La baza norilor sarcinile sunt în general negative. Se creează diferențe de potențial de până la 100 MV în raport cu suprafața pământului ( $\gg 0.4$  MV)
- Un trăsnet transportă circa 25 C.
- Curentul într-un fulger este de aprox. 10 kA

# Câmpul sarcinilor electrice în mișcare





$$F'_{\perp} = q_0 \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$F_{\perp} = q_0 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = q_0 \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Este corect ?

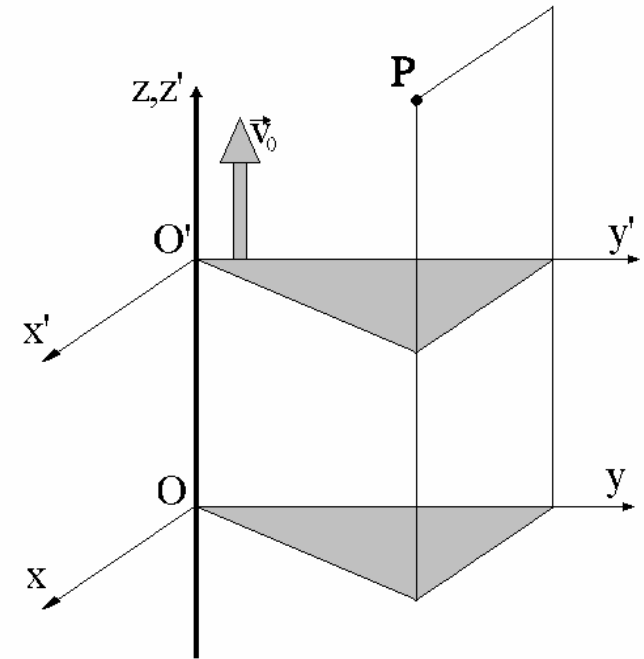
# Transformările Lorentz

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma_0 (z' + v_0 t') \\ t = \gamma_0 \left( t' + \frac{v_0}{c^2} z' \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma_0 (z - v_0 t) \\ t' &= \gamma_0 \left( t - \frac{v_0}{c^2} z \right) \end{aligned}$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{\gamma_0 \left( dt - \frac{v_0}{c^2} dz \right)} = \frac{u_x}{\gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right)} \\ u'_y &= \frac{u_y}{\gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right)} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{\gamma_0 (dz - v_0 dt)}{\gamma_0 \left( dt - \frac{v_0}{c^2} dz \right)} = \frac{u_z - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} u_z} \end{aligned} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x}{\gamma_0 \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma_0 \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)} \\ u_z &= \frac{u'_z + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z} \end{aligned} \right.$$

$$\gamma = \gamma_0 \gamma' \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{si} \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \left[ 1 - \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left[ 1 - \frac{u_x'^2}{\gamma_0^2 c^2 \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)^2} - \frac{u_y'^2}{\gamma_0^2 c^2 \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)^2} - \frac{(u'_z + v_0)^2}{c^2 \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right) \left[ 1 - \frac{v_0^2}{c^2} - \left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) \frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right) \left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma_0 \gamma' \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right) \end{aligned}$$

$$u'_x = \gamma_0 \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right) u_x \quad \frac{dt'}{dt} = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right)$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{dp_x}{dt} = \frac{d(mu_x)}{dt} = \frac{d(m_0 \gamma u_x)}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ m_0 \gamma_0 \gamma' \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right) u_x \right] = \frac{d}{dt} (m_0 \gamma' u'_x) = \\ &= \frac{d}{dt} (m' u'_x) = \frac{d(m' u'_x)}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_z &= \frac{dp_z}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 \gamma u_z) = \frac{d}{dt} \left[ m_0 \gamma_0 \gamma' \left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right) u_z \right] = \\
&= \frac{d}{dt} [m_0 \gamma' \gamma_0 (u'_z + v_0)] = \frac{d}{dt'} [m_0 \gamma' \gamma_0 (u'_z + v_0)] \frac{1}{\left( \frac{dt}{dt'} \right)} = \\
&= \frac{1}{\left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)} \frac{d}{dt'} [m_0 \gamma' (u'_z + v_0)] = \\
&= \frac{1}{\left( 1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z \right)} \left[ \frac{d(m_0 \gamma' u'_z)}{dt'} + m_0 v_0 \frac{d\gamma'}{dt'} \right] = \frac{1}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z} \left( F'_z + m_0 v_0 \frac{d\gamma'}{dt'} \right)
\end{aligned}$$

Pentru simplificarea relației utilizăm teorema energiei:

$$\frac{dE'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{u}'$$

$$E' = m'c^2 = m_0\gamma'c^2$$

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z} \left( F'_z + \frac{m_0 v_0}{m_0 c^2} \vec{F}' \cdot \vec{u}' \right) = \\ &= \frac{v_0}{c^2} F'_x \frac{u'_x}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z} + \frac{v_0}{c^2} F'_y \frac{u'_y}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_z} + F'_z = \\ &= \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_x u'_x + \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_y u'_y + F'_z \end{aligned}$$

$$m_0 c^2 \frac{d\gamma'}{dt'} = \vec{F}' \cdot \vec{u}'$$

$$\begin{cases} F_x = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_x \\ F_y = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_y \\ F_z = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_x u_x + \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_y u_y + F'_z \end{cases}$$

$$F'_y = q_0 \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$F_y = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_y = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) q_0 \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d}$$



$$F_y = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} q_0 \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$F_{\perp} = q_0 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = q_0 \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 d \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$F_y = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) F_{\perp}$$

$$F_m = -\frac{v_0^2}{c^2} F_e$$

$$\begin{cases} F_x = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_x \\ F_y = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_y \\ F_z = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_x u_x + \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_y u_y + F'_z \end{cases}$$

$$\vec{F} = \vec{\Phi}_1 + \vec{u} \times \vec{\Phi}_2$$

$$\vec{\Phi}_1 = \gamma_0 F'_x \vec{i} + \gamma_0 F'_y \vec{j} + F'_z \vec{k}$$

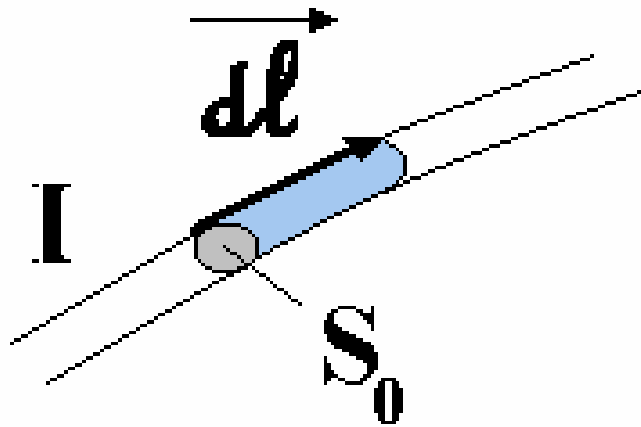
$$\vec{\Phi}_2 = -\gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_y \vec{i} + \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} F'_x \vec{j}$$

$$\vec{\Phi}_1 = q_0 \vec{E}$$

$$\vec{\Phi}_2 = q_0 \vec{B}$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{u} \times \vec{B}$$

Forța Lorentz



$$\vec{j} = \frac{I}{S_0} \frac{d\vec{l}}{dl} = \rho \vec{u}$$

$$dq_{total} = S_0 dl n q_0$$

$$d\vec{F}_m = \rho S_0 dl \vec{u} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

**Forța Laplace**

# Legea de transformare a câmpurilor

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} + q_0 \vec{u} \times \vec{B}; \quad \vec{F}' = q_0 \vec{E}' + q_0 \vec{u}' \times \vec{B}'$$

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}; & \vec{E}_{\perp} = \gamma_0 \left( \vec{E}'_{\perp} - \vec{v}_0 \times \vec{B}' \right) \\ \vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}; & \vec{B}_{\perp} = \gamma_0 \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{\vec{v}_0 \times \vec{E}'}{c^2} \right) \end{cases}$$

$$F_x = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) F'_x$$

$$\begin{aligned} qE_x + q_0(u_y B_z - u_z B_y) &= \\ &= \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) [q_0 E'_x + q_0(u'_y B'_z - u'_z B'_y)] \end{aligned}$$

$$u_y = \gamma_0 \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) u'_y$$

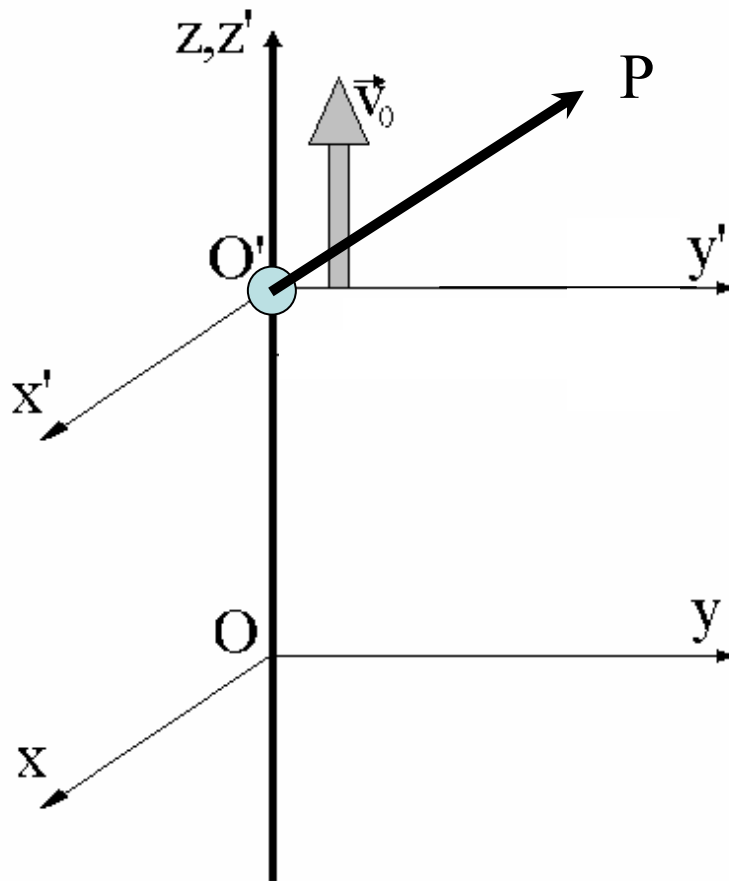
$$u_z - v_0 = \left( 1 - \frac{v_0}{c^2} u_z \right) u'_z$$

$$\begin{aligned} E_x + u_y B_z - u_z B_y &= \\ &= \gamma_0 E'_x - \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} u_z E'_x + u_y B'_z - (u_z - v_0) \gamma_0 B'_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_x + u_y B_z - u_z B_y &= \\
 &= \gamma_0 E'_x - \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} u_z E'_x + u_y B'_z - (u_z - v_0) \gamma_0 B'_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 E_x = \gamma_0 (E'_x + v_0 B'_y) \\
 B_y = \gamma_0 \left( B'_y + \frac{v_0}{c^2} E'_x \right) \\
 B_z = B'_z
 \end{cases}$$

# Câmpul electric al sarcinilor în mișcare



$$\vec{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}'}{R'^3}$$

$$\vec{R}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$r'\vec{u}_r = x'\vec{i} + y'\vec{j}$$



$$E'_{\parallel} \equiv E'_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E'_{\perp} \equiv E'_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E_{\perp} = \gamma_0 E'_{\perp} = \gamma_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} r' = r \\ z' = \gamma_0(z - v_0 t) \end{cases}$$

$$R'^2 = r'^2 + z'^2 = r^2 + \gamma_0^2(z - v_0 t)^2$$

$$\vec{R}_0 = r\vec{u}_r + (z - v_0 t)\vec{k}$$

$$r = R_0 \sin \theta_0 \quad \text{si} \quad (z - v_0 t) = R_0 \cos \theta_0$$

$$R'^2 = R_0^2 \sin^2 \theta_0 + \gamma_0^2 R_0^2 \cos^2 \theta_0 = \gamma_0^2 R_0^2 \left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta_0 \right)$$

$$\vec{E} = E_{\parallel} \vec{k} + E_{\perp} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \gamma_0 \frac{\vec{R}_0}{R'^3} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{\left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta_0 \right)^{3/2}} \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$E_{\perp} = \gamma_0 E'_{\perp} = \gamma_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r'}{(r'^2 + z'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} r' = r \\ z' = \gamma_0 (z - v_0 t) \end{cases}$$

# Problemă

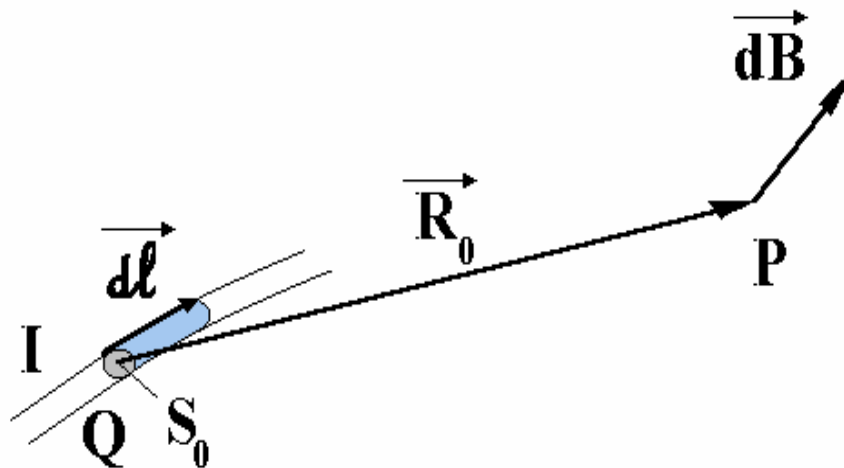
- Comparați câmpul electric creat de sarcinile în repaus cu cel al sarcinilor aflate în mișcare rectilinie și uniformă.

$$\vec{B}_{||} = \vec{B}'_{||} = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{\perp} &= \gamma_0 \left( \vec{B}'_{\perp} + \frac{\vec{v}_0 \times \vec{E}'_{\perp}}{c^2} \right) = \gamma_0 \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \times \vec{E}'_{\perp} = \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \times \vec{E}_{\perp} = \\ &= \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \times \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{\left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \theta_0 \right)^{\frac{3}{2}}} \vec{v}_0 \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} = \vec{B}\end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} Q \vec{v}_0 \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

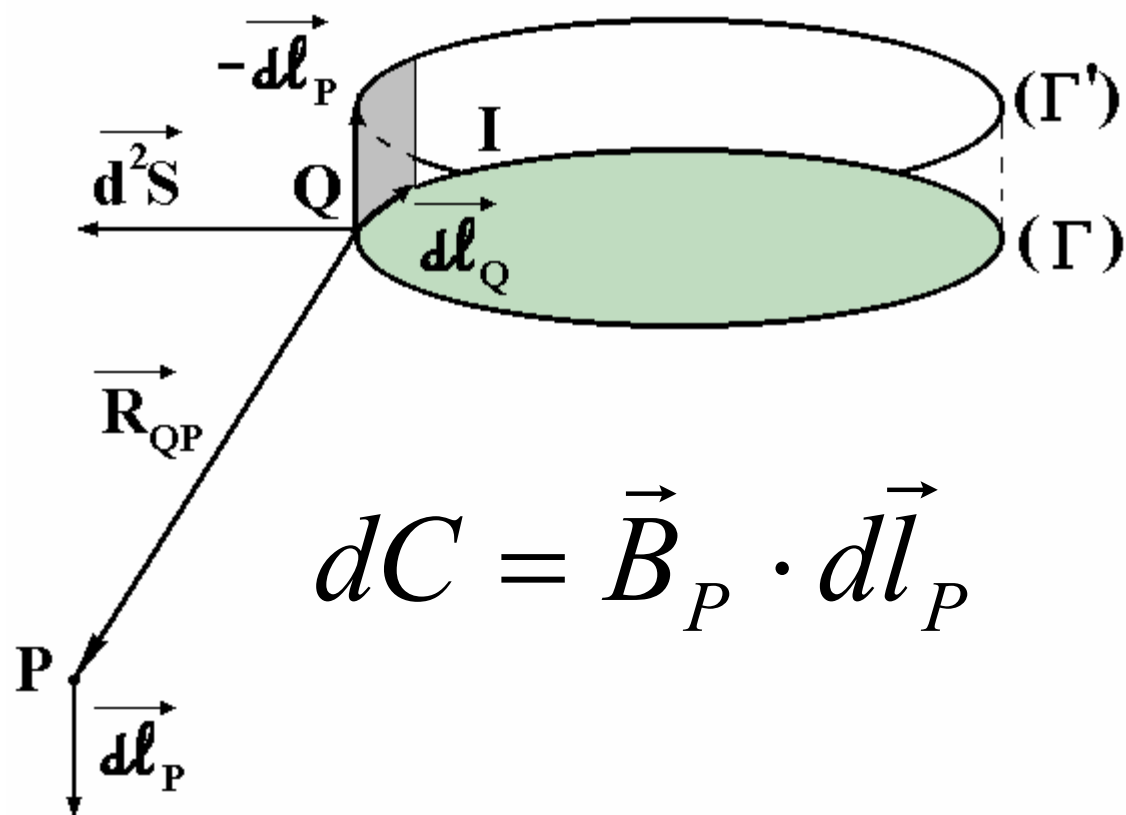


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \vec{v}_0 \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

# Legea Biot-Savart

# Circulația vectorului inducție magnetică

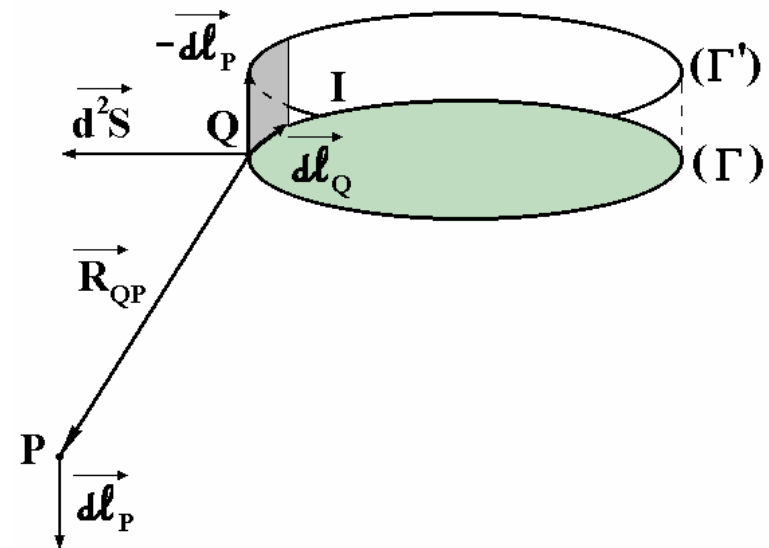


$$\left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\Gamma)} I d\vec{l}_Q \times \frac{\vec{R}_{QP}}{R_{QP}^3} \right) \cdot d\vec{l}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(\Gamma)} \frac{\vec{R}_{QP}}{R_{QP}^3} \cdot [d\vec{l}_Q \times (-d\vec{l}_P)]$$

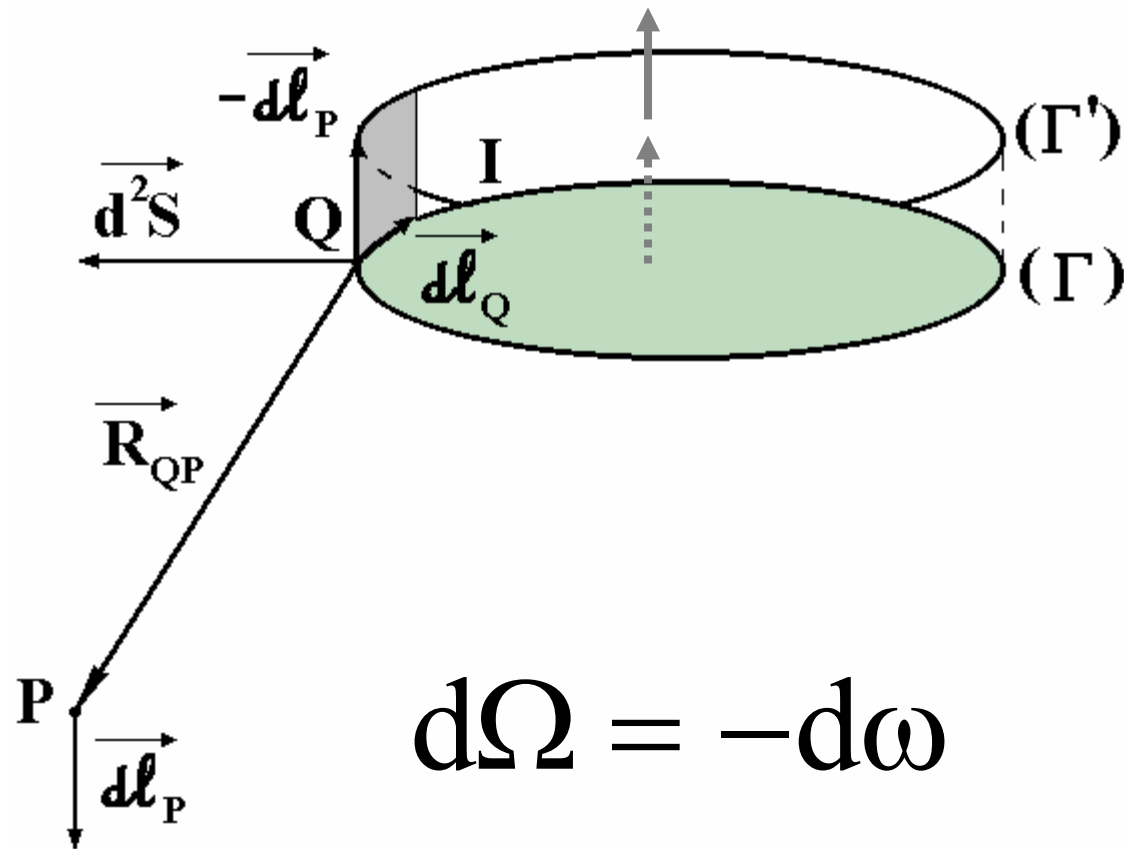
$$d\vec{l}_Q \times (-d\vec{l}_P) = d^2\vec{S}$$

$$dC = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(\Gamma)} d^2\vec{S} \cdot \frac{\vec{R}_{QP}}{R_{QP}^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(\Gamma)} \frac{\vec{R}_{PQ}}{R_{PQ}^3} \cdot d^2\vec{S} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(\Gamma)} d^2\omega$$

$$d\omega = \int_{(\Gamma)} d^2\omega$$







$$d\Omega = -d\omega$$

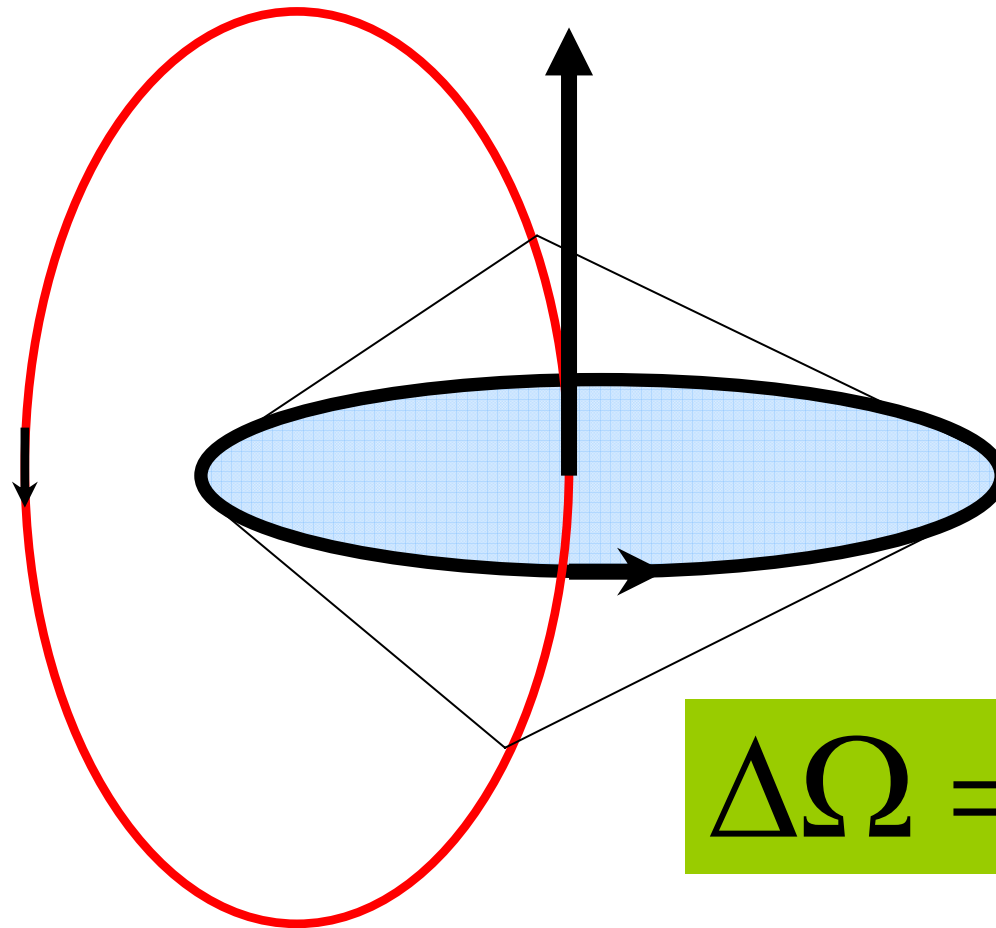
$$\Omega_{total} = 0 = -\Omega + (\Omega + d\Omega) + d\omega$$

$$dC = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega$$

$$\vec{B}_P \cdot d\vec{l}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{grad}_P \Omega \cdot d\vec{l}_P = -\text{grad}_P V_P \cdot d\vec{l}_P$$

$$V_p = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$$

$$\vec{B}_P = -\text{grad}_P V_P$$



$$\Delta\Omega = \pm 4\pi$$

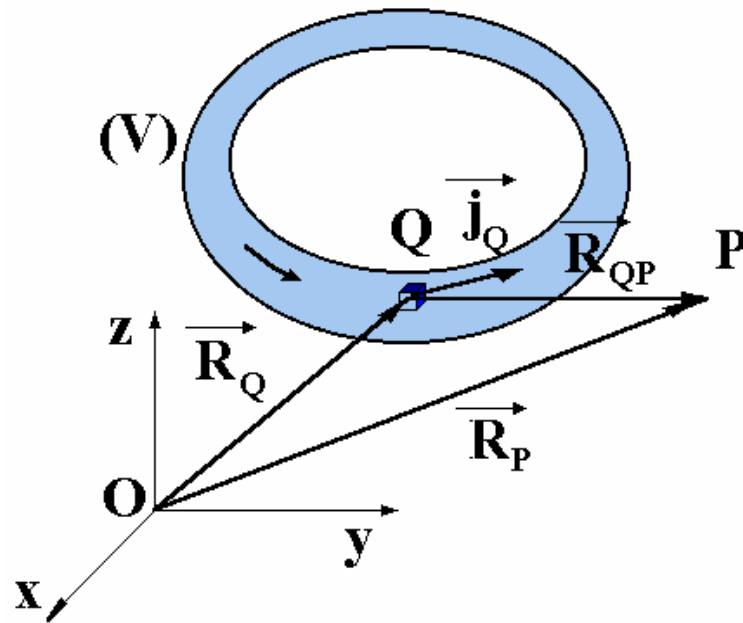
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Teorema Ampère

# Potențialul vector magnetic



$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \vec{j}_Q \times \frac{\vec{R}_{QP}}{R_{QP}^3} dv_Q$$

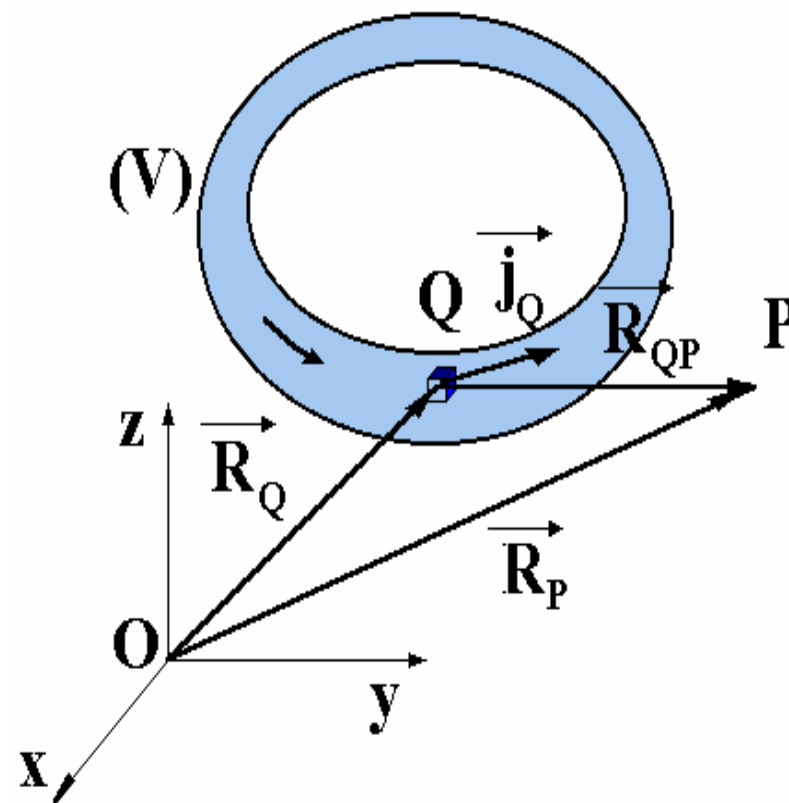
$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \vec{j}_Q \times \frac{\vec{R}_{QP}}{R_{QP}^3} dv_Q$$

$$\frac{\vec{R}_{QP}}{R_{QP}^3} = -grad_P \left( \frac{1}{R_{QP}} \right) = grad_Q \left( \frac{1}{R_{QP}} \right)$$

$$\begin{aligned} rot_P \left( \frac{\vec{j}_Q}{R_{QP}} \right) &= \frac{rot_P(\vec{j}_Q)}{R_{QP}} - \vec{j}_Q \times grad_P \left( \frac{1}{R_{QP}} \right) = \\ &= -\vec{j}_Q \times grad_P \left( \frac{1}{R_{QP}} \right) \quad (am\ folosit\ rot_P(\vec{j}_Q) = 0) \end{aligned}$$

$$\vec{B}_P = \text{rot}_P \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}_Q}{R_{QP}} dv_Q \right)$$

$$\vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}_Q}{R_{QP}} dv_Q$$

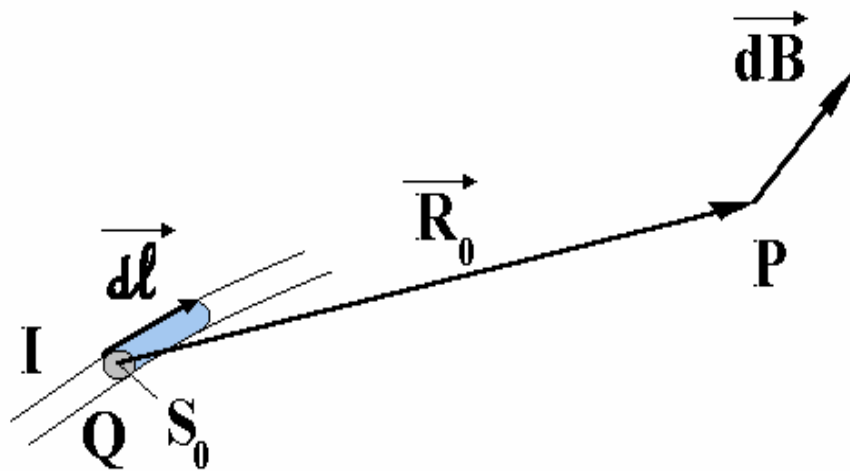


$$\vec{B}_P = \text{rot}_P \vec{A}_P$$

# Metode de calcul pentru inducția magnetică

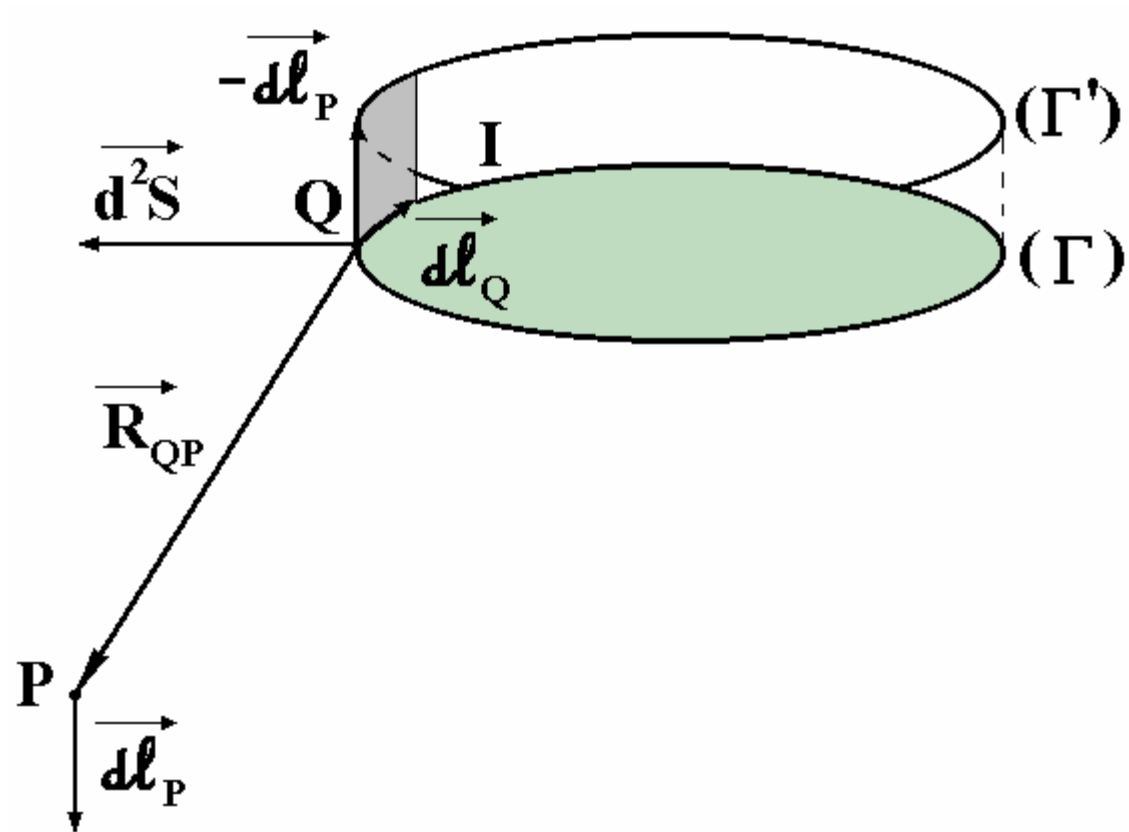
1. Aplicând direct legea Biot-Savart pentru elementul de curent și integrând de-a lungul curentului care generează câmpul magnetic
2. Calculând potențialul scalar și apoi utilizând relația între inducția magnetică și potențialul scalar
3. Calculând potențialul vector și apoi utilizând relația între inducția magnetică și potențialul vector
4. Aplicând teorema lui Ampère (pentru sistemele cu simetrie ridicată)





$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \vec{v}_0 \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3} \longrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{R}_0}{R_0^3}$$

**Legea Biot-Savart**



$$V_p = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$$

$$\vec{B}_P = -grad_P V_P$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

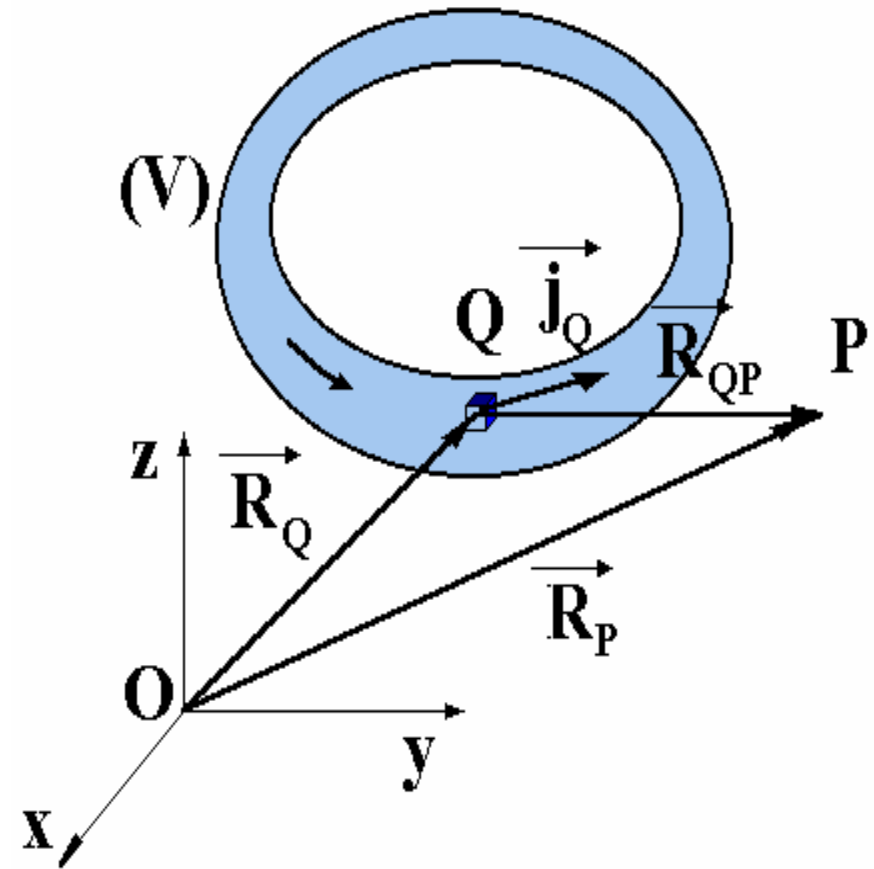
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

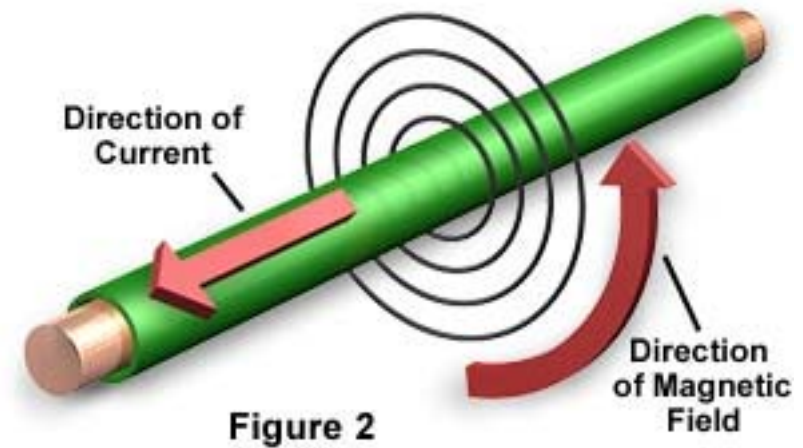
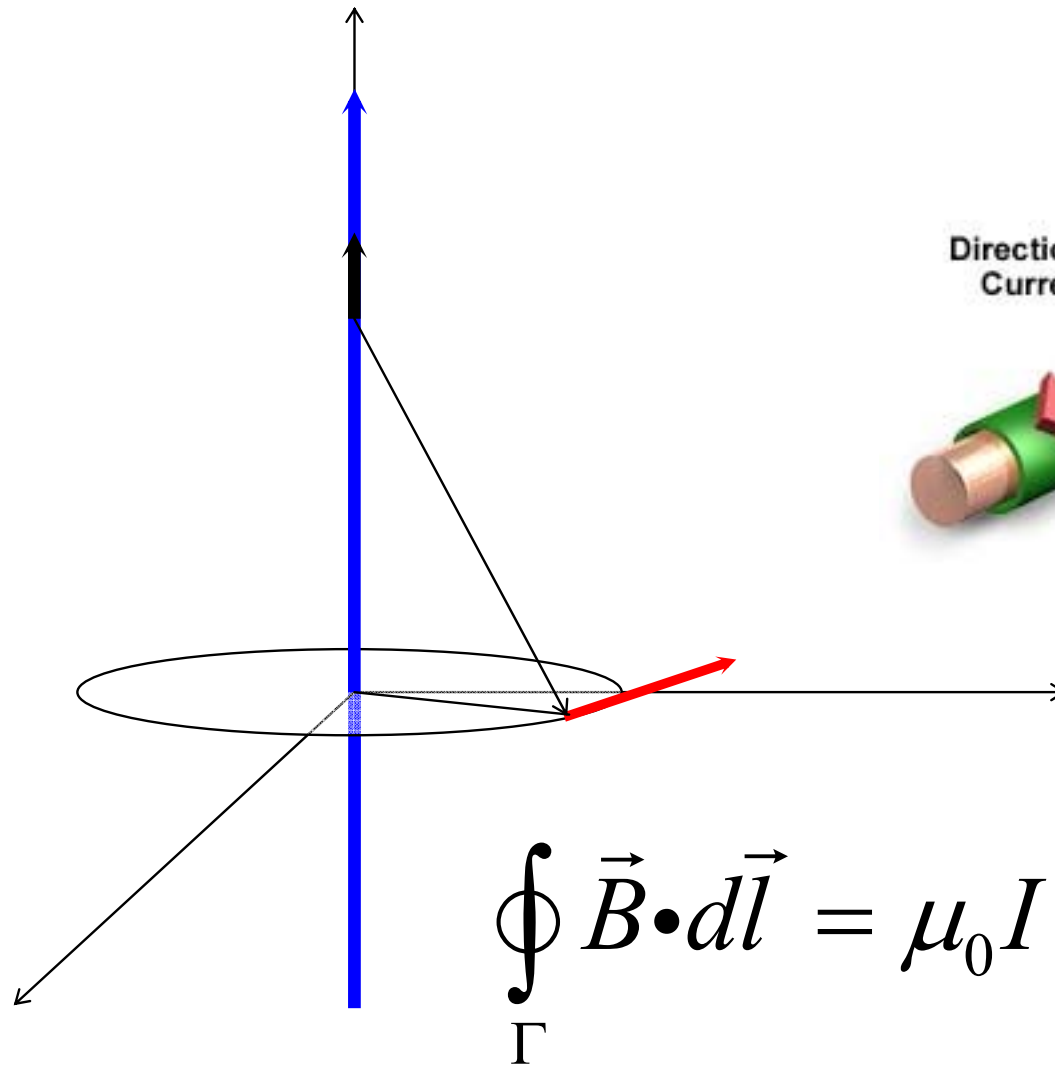
Teorema Ampère

$$\vec{B}_P = \text{rot}_P \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}_Q}{R_{QP}} dv_Q \right)$$

$$\vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{\vec{j}_Q}{R_{QP}} dv_Q$$

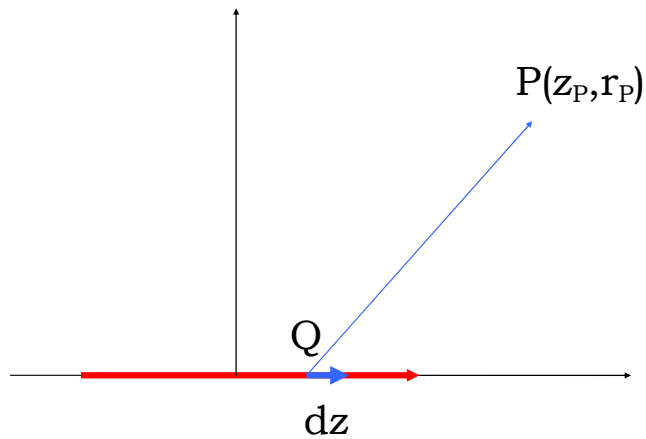
$$\vec{B}_P = \text{rot}_P \vec{A}_P$$





$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$B_{\varphi} 2\pi r_0 = \mu_0 I \rightarrow B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$



$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2 \sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L/2}^{L/2} d\vec{L} \times \frac{\vec{R}}{R^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L/2}^{L/2} dz \vec{k} \times \frac{(z_P - z) \vec{k} + r_P \vec{u}_r}{\left[ (z_P - z)^2 + r_P^2 \right]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L/2}^{L/2} \frac{r_P dz \vec{u}_\varphi}{\left[ (z_P - z)^2 + r_P^2 \right]^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I r_P \frac{1}{r_P^2} \frac{(z - z_P)}{\left[ (z - z_P)^2 + r_P^2 \right]^{3/2}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} \end{aligned}$$

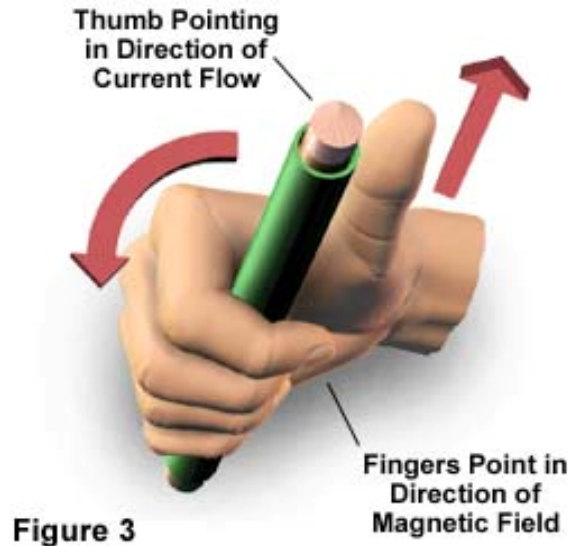


Figure 3

$$F_{12} = B_1 I_2 L = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 L$$

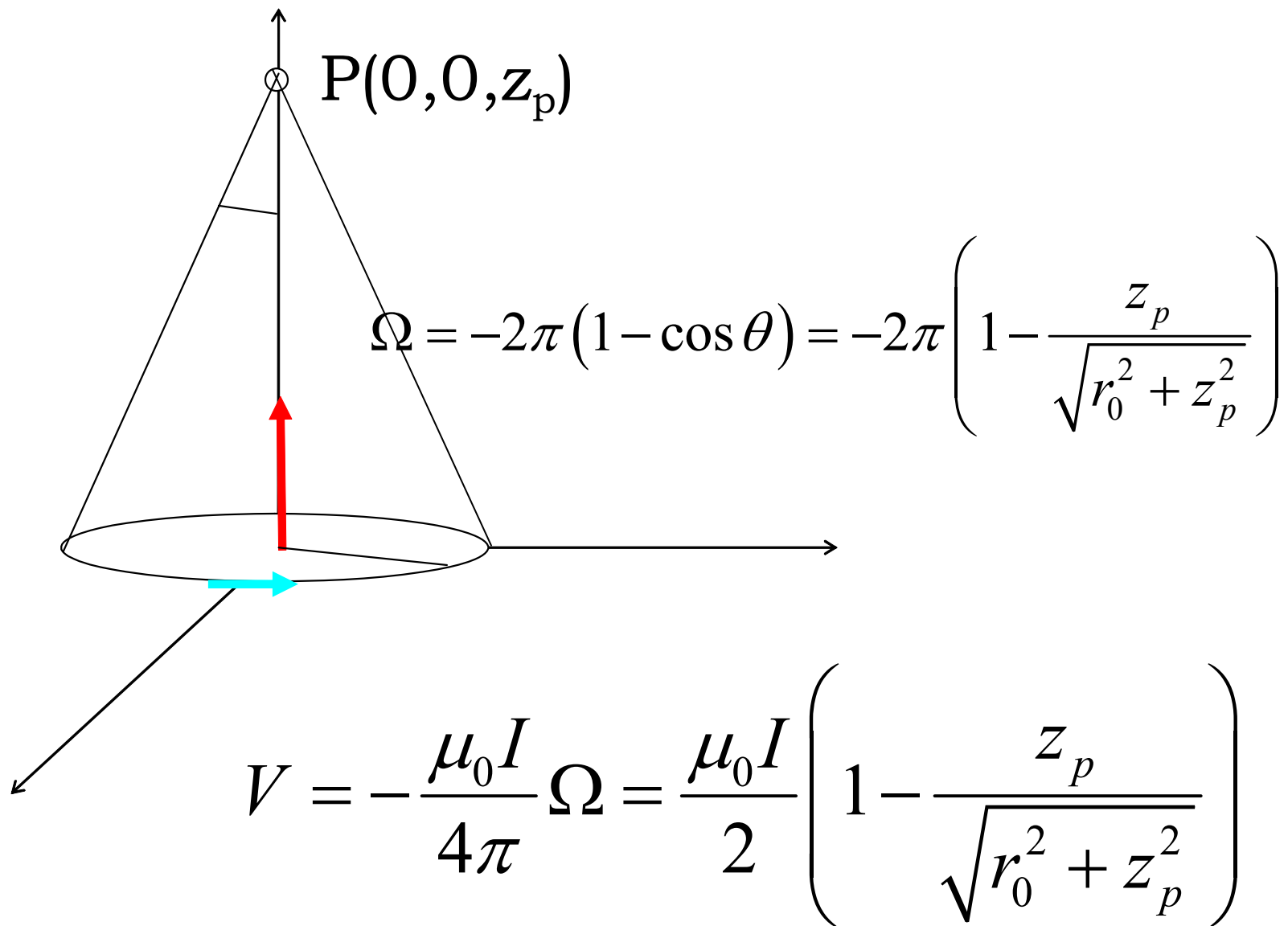
$$I_1 = I_2 = I, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left( \frac{H}{m} \right)$$

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi d} I^2 L, \quad I = 1A, \quad L = 1m, \quad d = 1m$$

$$F = 2 \times 10^{-7} N$$

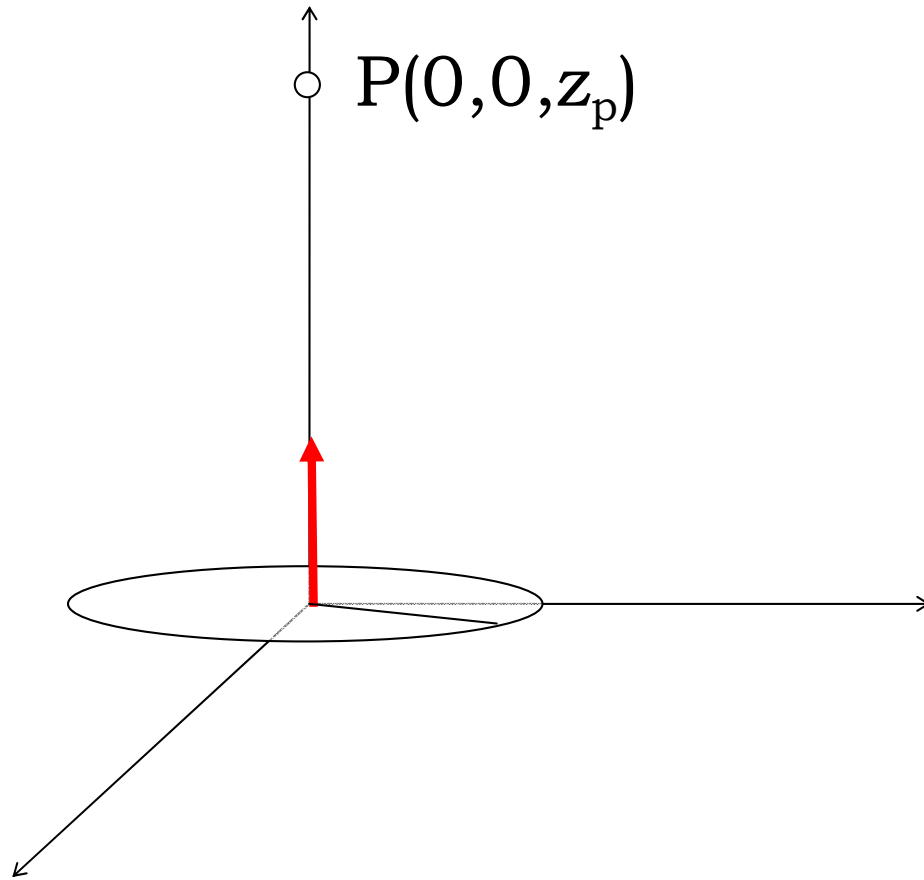
Interacțiunea dintre curenți liniari paraleli

Definiția Amperului



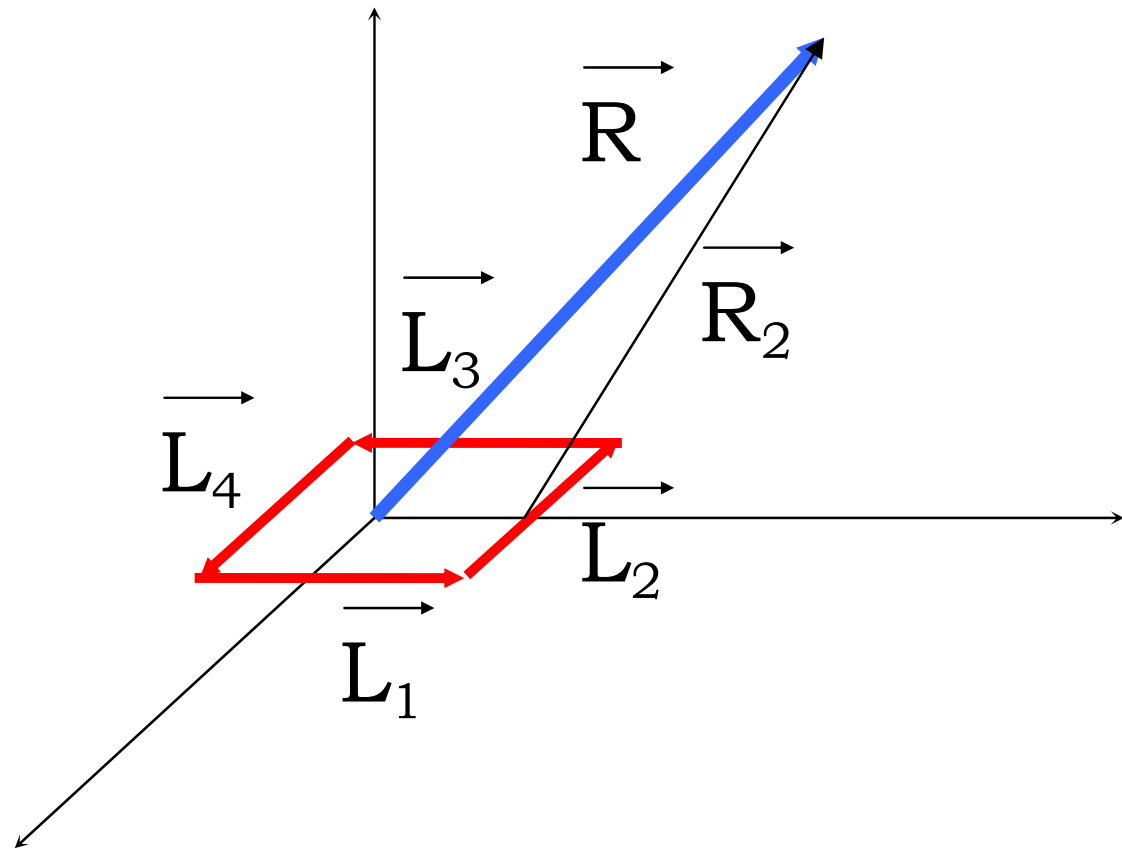


$$\begin{aligned}
B_z &= -\frac{dV}{dz_p} = -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{d}{dz_p} \left( 1 - \frac{z_p}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}} \right) = \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2} \frac{d}{dz_p} \left[ -z_p (r_0^2 + z_p^2)^{-1/2} \right] = \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2} \left[ - (r_0^2 + z_p^2)^{-1/2} - z_p \left( -\frac{1}{2} \right) (r_0^2 + z_p^2)^{-3/2} 2z_p \right] = \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2} (r_0^2 + z_p^2)^{-3/2} \left[ - (r_0^2 + z_p^2) + z_p z_p \right] = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \left( \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + z_p^2}} \right)^3 = B_0 \sin^3 \theta
\end{aligned}$$



$$V = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \cong -\frac{\mu_0 I}{4\pi} (-\vec{S}) \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p}_m \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{p}_m = I\vec{S}$$



$$\vec{A}_p \cong \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\vec{L}_1}{R_1} + \frac{\vec{L}_2}{R_2} + \frac{\vec{L}_3}{R_3} + \frac{\vec{L}_4}{R_4} \right)$$

$$\begin{aligned}\vec{A}_p &\cong \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\vec{L}_1}{R_1} + \frac{\vec{L}_2}{R_2} - \frac{\vec{L}_1}{R_3} - \frac{\vec{L}_2}{R_4} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \vec{L}_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) + \vec{L}_2 \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} \right) \right)\end{aligned}$$

$$R_1 R_3 \cong R^2$$

$$R_2 R_4 \cong R^2$$

$$R_1 - R_3 = L_2 \cos(\vec{L}_2, \vec{R}) = \vec{L}_2 \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

$$R_2 - R_4 = L_3 \cos(\vec{L}_3, \vec{R}) = \vec{L}_3 \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}_p &\cong \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{\vec{L}_1}{R_1} + \frac{\vec{L}_2}{R_2} - \frac{\vec{L}_1}{R_3} - \frac{\vec{L}_2}{R_4} \right) = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( -\frac{\vec{L}_1 (\vec{L}_2 \cdot \vec{R})}{R^3} + \frac{\vec{L}_2 (\vec{L}_1 \cdot \vec{R})}{R^3} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{R} \times (\vec{L}_2 \times \vec{L}_1)}{R^3} = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{R} \times (-\vec{S})}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{S} \times \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p}_m \times \frac{\vec{R}}{R^3}
\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{R} \times (\vec{L}_2 \times \vec{L}_1) = \vec{L}_2 (\vec{R} \cdot \vec{L}_1) - \vec{L}_1 (\vec{R} \cdot \vec{L}_2)$$

Demonstrați !!!

$$\vec{B} = -gradV = rot\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{R}) \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}_m}{R^3} \right]$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{p}_m \times \frac{\vec{R}}{R^3}, \quad \vec{p}_m = p_m \vec{k}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & p_m \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi R^3} (-y\vec{i} + x\vec{j})$$

$$\vec{B} = rot\vec{A} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{R^3} & \frac{x}{R^3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_x = \left( \text{rot} \vec{A} \right)_x = -\frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{R^3} \right) = -\frac{\mu_0 p_m x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-3/2} \right] =$$

$$= -\frac{\mu_0 p_m x}{4\pi} \left( -\frac{3}{2} \right) \left( x^2 + y^2 + z^2 \right)^{-5/2} 2z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 p_m x z}{R^5}$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3 p_m y z}{R^5}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{R^3} \right) \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \left[ \frac{1}{R^3} + x \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{R^5} + \frac{1}{R^3} + y \left( -\frac{3}{2} \right) \frac{2y}{R^5} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \left[ \frac{2}{R^3} - \frac{3 \left( x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \right)}{R^5} \right]$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3 \left( \vec{p}_m \cdot \vec{R} \right) \vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}_m}{R^3} \right]$$



## Formule generale

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}_e \cdot \frac{\vec{R}_p}{R_p^3}$$

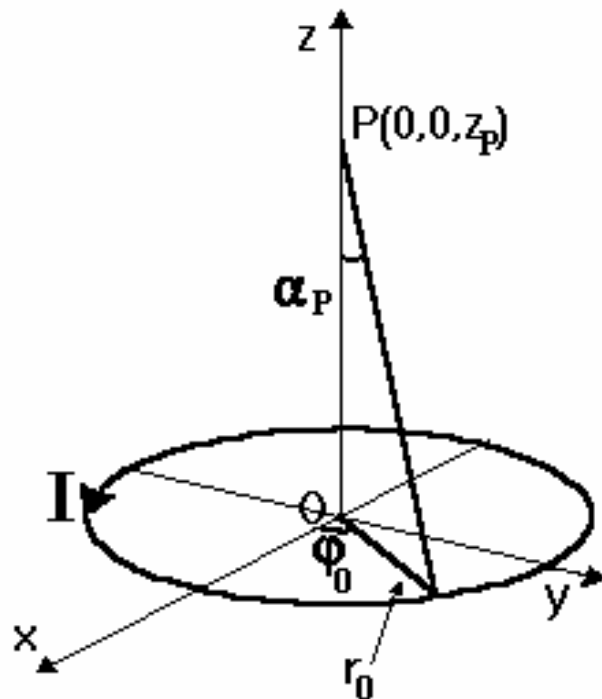
$$\vec{E} = -\text{grad } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{p}_e \cdot \vec{R}_p) \vec{R}_p}{R_p^5} - \frac{\vec{p}_e}{R_p^3} \right]$$

# Câmpul magnetic al unui curent circular

$$\vec{B} = -grad V_{mP} = rot \vec{A}_P$$

$$V_{mP} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega$$

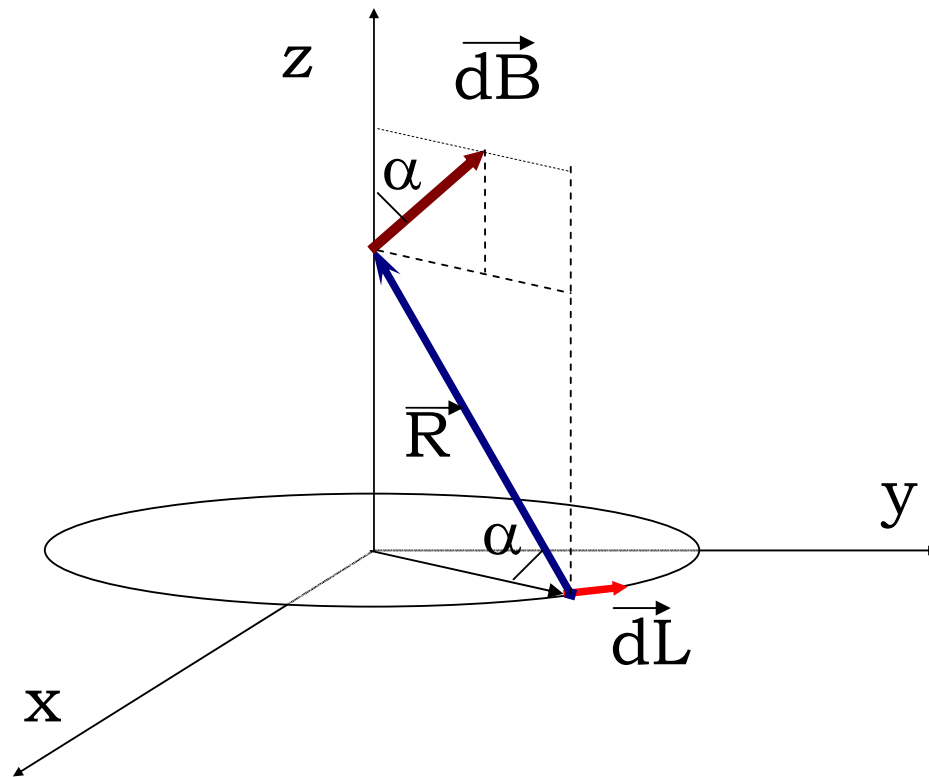
$$\Omega = -2\pi(1 - \cos \alpha_P) \Rightarrow V_{mP} = \frac{\mu_0 I}{2} (1 - \cos \alpha_P)$$



$$B_{zP} = -\frac{\partial V_{mP}}{\partial z_P} = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \left[ \frac{r_0}{\sqrt{z_P^2 + r_0^2}} \right]^3 = B_0 \sin^3 \alpha_P$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r_0}$$

# Calcul prin integrare directă



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} r_0 d\varphi \vec{u}_\varphi \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\varphi}{R^2}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\varphi}{R^2} \cos \alpha$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\varphi}{R^2} \sin \alpha \cos \varphi$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\varphi}{R^2} \sin \alpha \sin \varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 d\varphi}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0^2}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2r_0} \frac{r_0^3}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}} = B_0 \sin^3 \theta$$

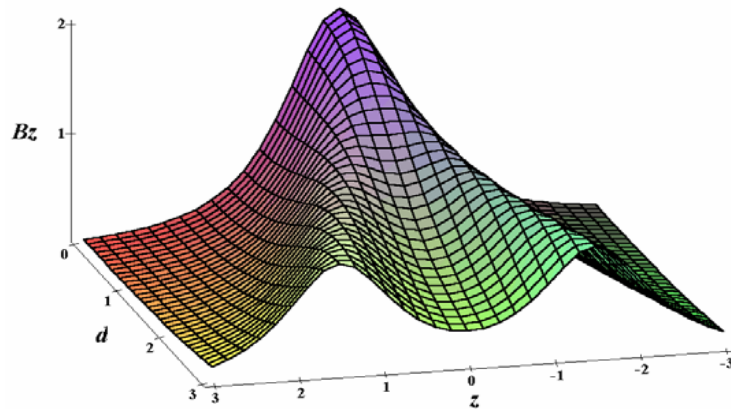
$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 d\varphi}{R^2} \sin \alpha \cos \varphi = 0$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 d\varphi}{R^2} \sin \alpha \sin \varphi = 0$$

## Sistemul de bobine Helmholtz

$$B_z = B_{z1} + B_{z2} = B_0 \left[ \sin^3 \alpha_{P+} + \sin^3 \alpha_{P-} \right] =$$

$$B_0 \left[ \left( \frac{r_0^2}{r_0^2 + (z - d/2)^2} \right)^{3/2} + \left( \frac{r_0^2}{r_0^2 + (z + d/2)^2} \right)^{3/2} \right]$$



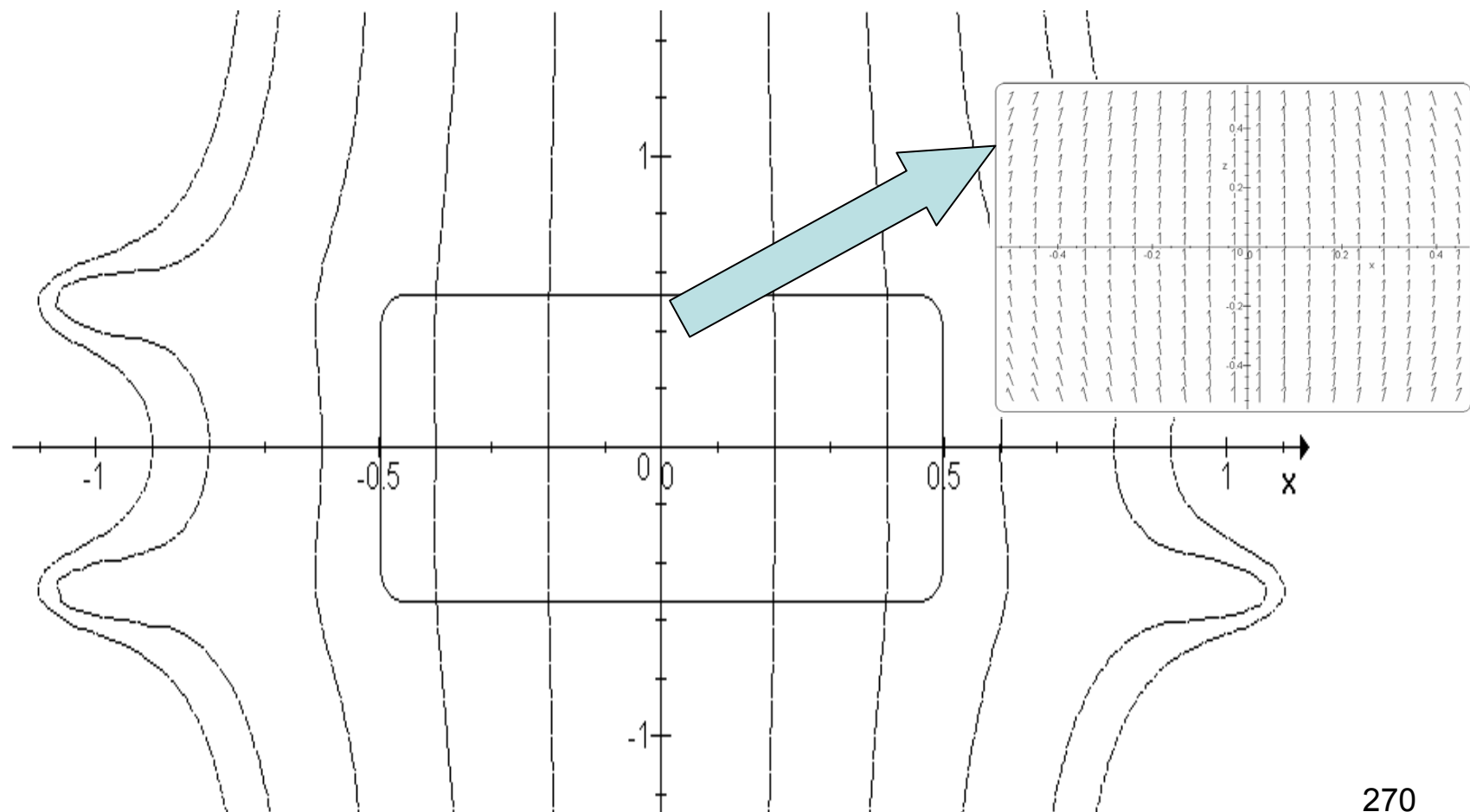
$$\left. \frac{dB_z}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=0} = 0$$

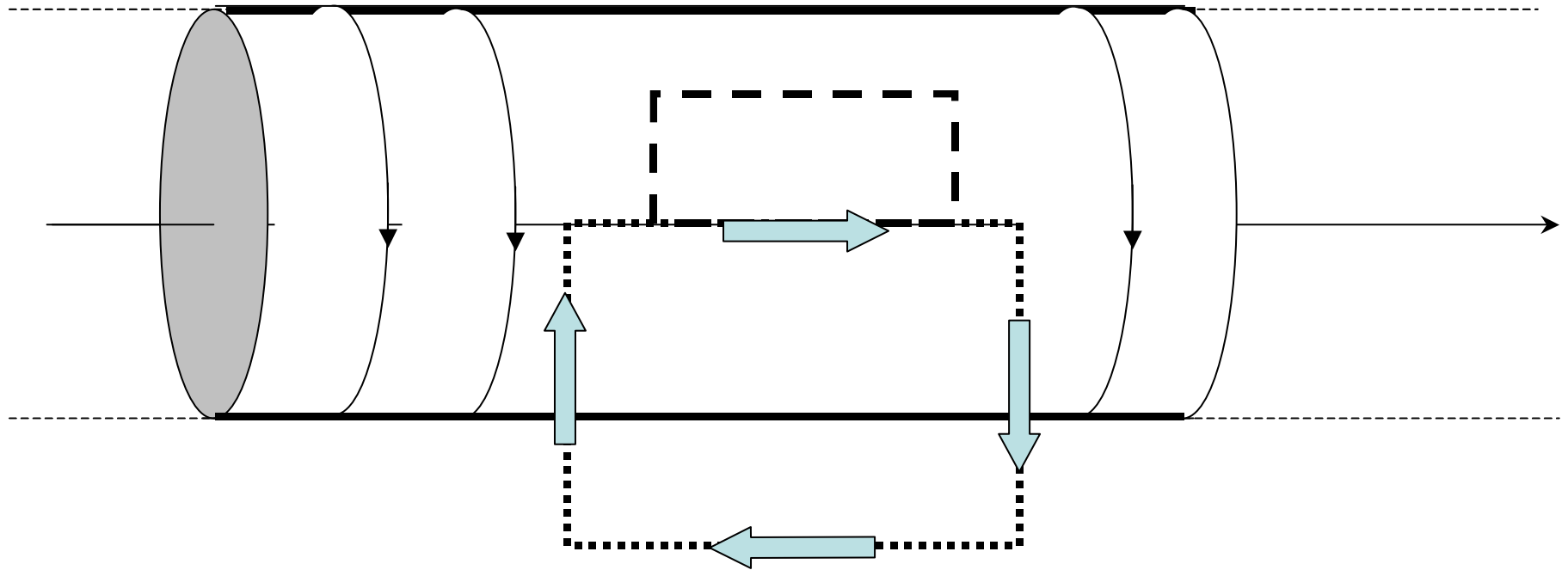
$$\longrightarrow d=r_0$$

$$B_z(z) = B_z(0) + \left. \frac{dB_z}{dz} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=0} z^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 B_z}{dz^3} \right|_{z=0} z^3 + \dots$$

# Câmpul uniform



## Câmpul solenoidului

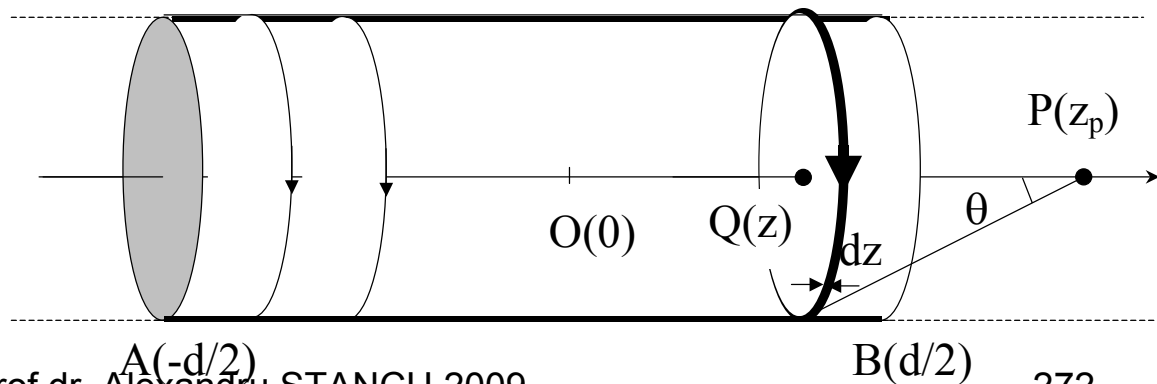


$B$  este uniform în interiorul solenoidului și este zero în exteriorul acestuia.

$$dB_z = \frac{\mu_0 dI}{2r_0} \sin^3 \theta = \frac{\mu_0 n I dz}{2r_0} \left[ \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (z_p - z)^2}} \right]^3$$

$$B_z = \frac{\mu_0 n I r_0^2}{2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dz}{\left[ (z - z_p)^2 + r_0^2 \right]^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{(z - z_p)}{\sqrt{(z - z_p)^2 + r_0^2}} \Bigg|_{-d/2}^{d/2} =$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{\left( \frac{d}{2} - z_p \right)}{\sqrt{\left( \frac{d}{2} - z_p \right)^2 + r_0^2}} + \frac{\left( \frac{d}{2} + z_p \right)}{\sqrt{\left( \frac{d}{2} + z_p \right)^2 + r_0^2}} \right]$$



$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2 \sqrt{\xi^2 + a^2}} + C$$

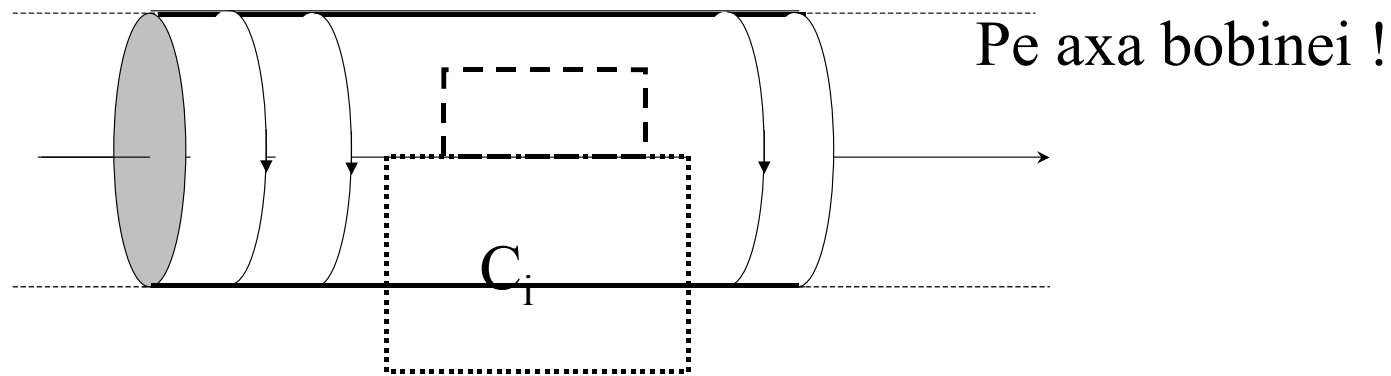


Cazul  $A_r = A_z = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \text{rot } \vec{A} \right)_r = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial z} \right] = B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ \left( \text{rot } \vec{A} \right)_\varphi = \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] = B_\varphi = 0 \\ \left( \text{rot } \vec{A} \right)_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] = B_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \end{array} \right.$$

## Solenoidul infinit

$$d \rightarrow \infty \quad B_z = \mu_0 n I = \mu_0 i_s$$

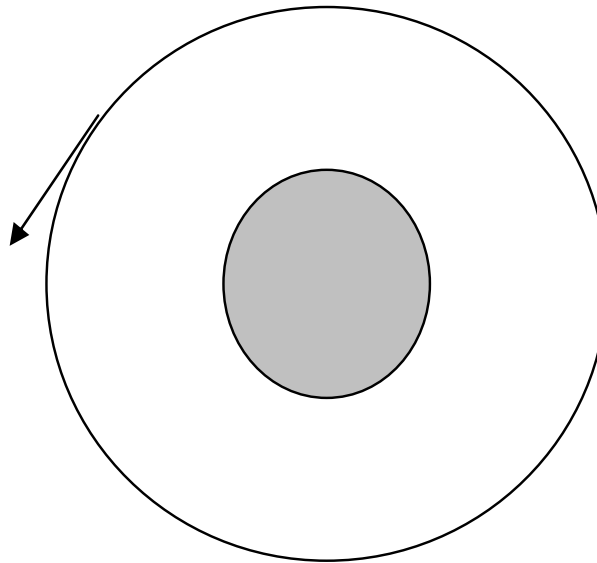


Datorită

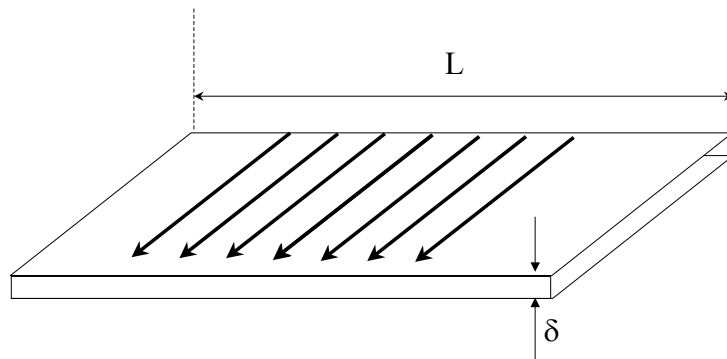
$$B_z = \begin{cases} \mu_0 i_s & \text{pentru } r \leq r_0 \\ 0 & \text{pentru } r > r_0 \end{cases}$$

- Inducția nu are componentă după  $\varphi$

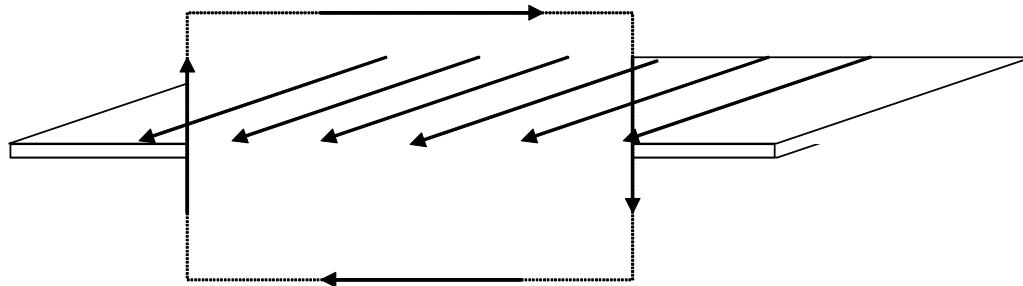
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{L}$$



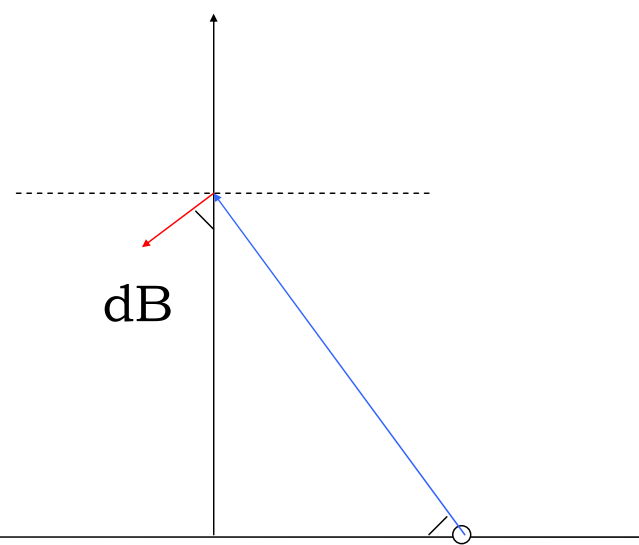
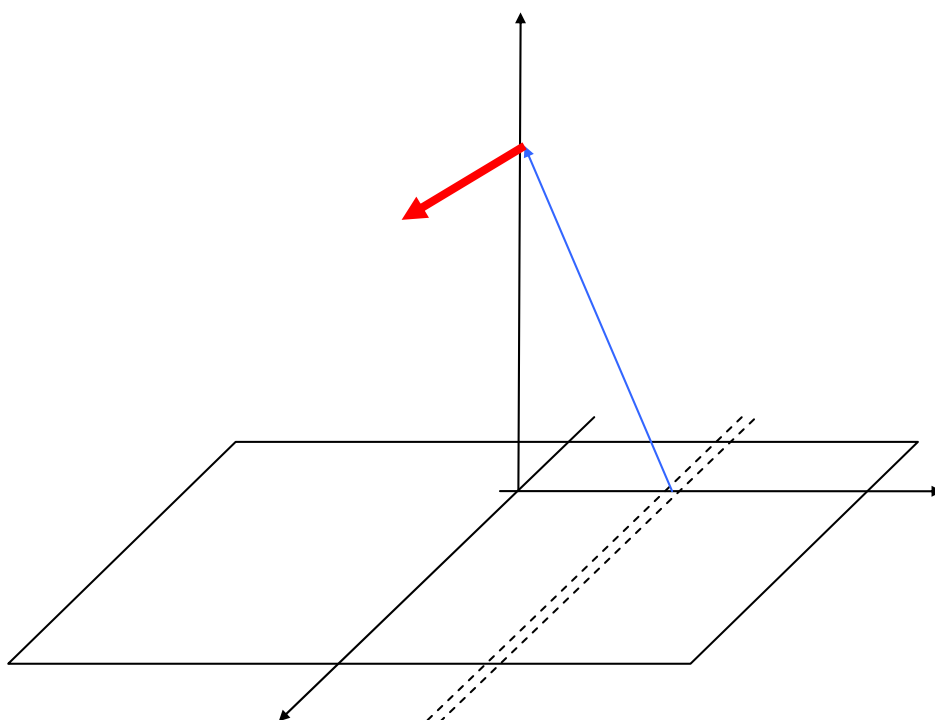
## Current superficial plan



$$i_s = \frac{I}{L}$$



Simetrie !



$$dB_z = -dB \cos \alpha$$

$$dB_y = -dB \sin \alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_s dy}{\sqrt{y^2 + z_P^2}}$$

$$dB_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_s dy}{\sqrt{y^2 + z_P^2}} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z_P^2}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_s y dy}{y^2 + z_P^2}$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 i_s}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{y dy}{y^2 + z_P^2} = -\frac{\mu_0 i_s}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{d(y^2 + z_P^2)}{y^2 + z_P^2} = -\frac{\mu_0 i_s}{4\pi} \ln |y^2 + z_P^2| \Big|_{-L}^L = 0$$

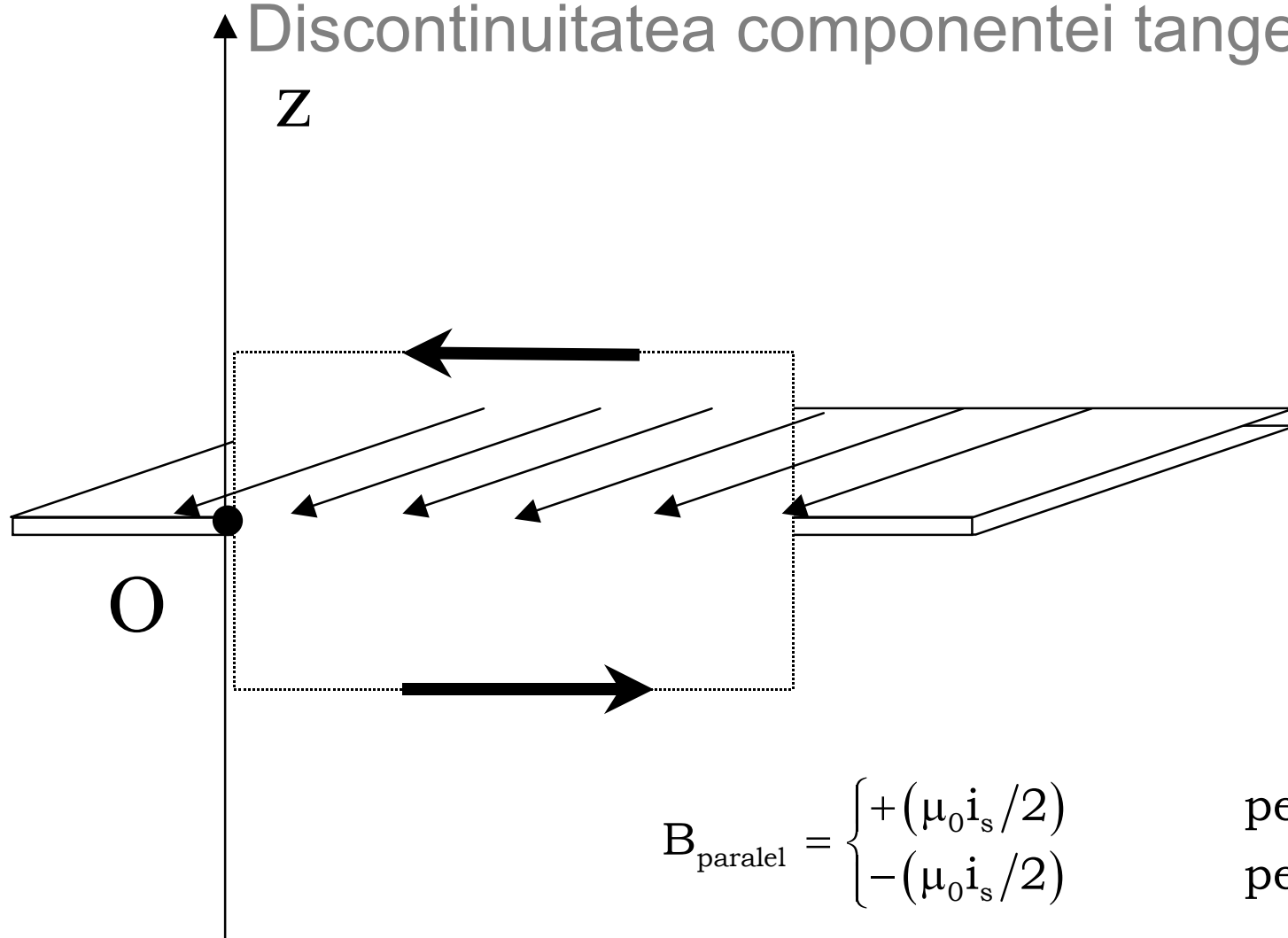
$$dB_y = -dB \sin \alpha = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_s dy}{\sqrt{y^2 + z_P^2}} \frac{z_P}{\sqrt{y^2 + z_P^2}} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_s z_P dy}{y^2 + z_P^2}$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 i_s z_P}{2\pi} \int_{-L}^L \frac{dy}{y^2 + z_P^2} = -\frac{\mu_0 i_s z_P}{2\pi} \frac{1}{z_P} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{z_P} \right) \Big|_{-L}^L = -\frac{\mu_0 i_s z_P}{2\pi} \frac{2}{z_P} \operatorname{arctg} \left( \frac{L}{z_P} \right)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 i_s}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{L}{z_P} \right)$$

$$\text{and } L \rightarrow \infty, B_y \rightarrow -\frac{\mu_0 i_s}{2}$$

## Discontinuitatea componentei tangențiale



$$B_{\text{paralel}} = \begin{cases} +(\mu_0 i_s / 2) & \text{pentru } z \leq 0 \\ -(\mu_0 i_s / 2) & \text{pentru } z > 0 \end{cases}$$

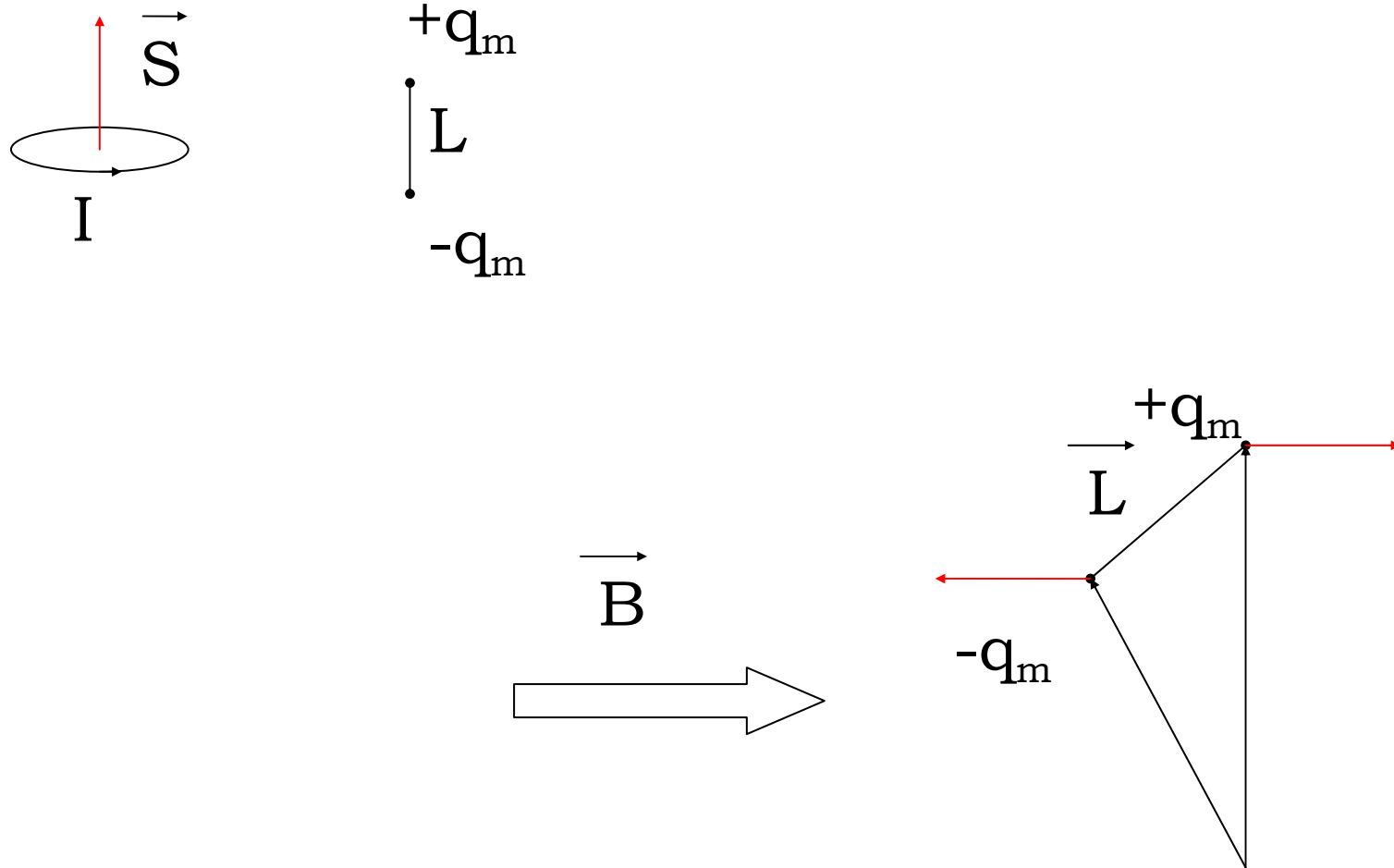
# Probleme

Comparați relațiile de discontinuitate care apar la trecerea prin distribuții superficiale (de sarcina, pentru intensitatea câmpului electric și de curent, pentru inducția magnetică)

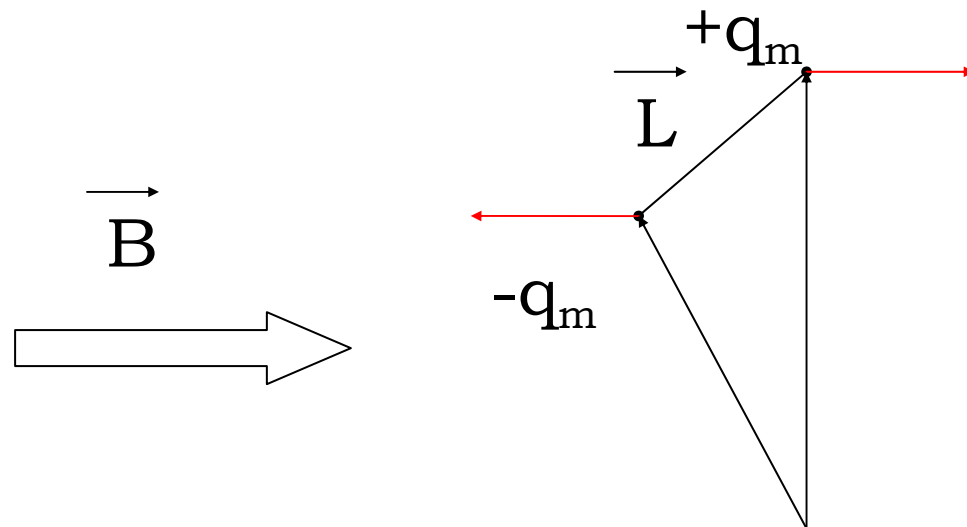


# Interacțiunea dintre curenți și câmpul magnetic

# Sarcini magnetice fictive



$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \vec{R}_+ \times (q_m \vec{B}) + \vec{R}_- \times (-q_m \vec{B}) = \\ &= q_m (\vec{R}_+ - \vec{R}_-) \times \vec{B} = q_m \vec{L} \times \vec{B} = \vec{p}_m \times \vec{B}\end{aligned}$$



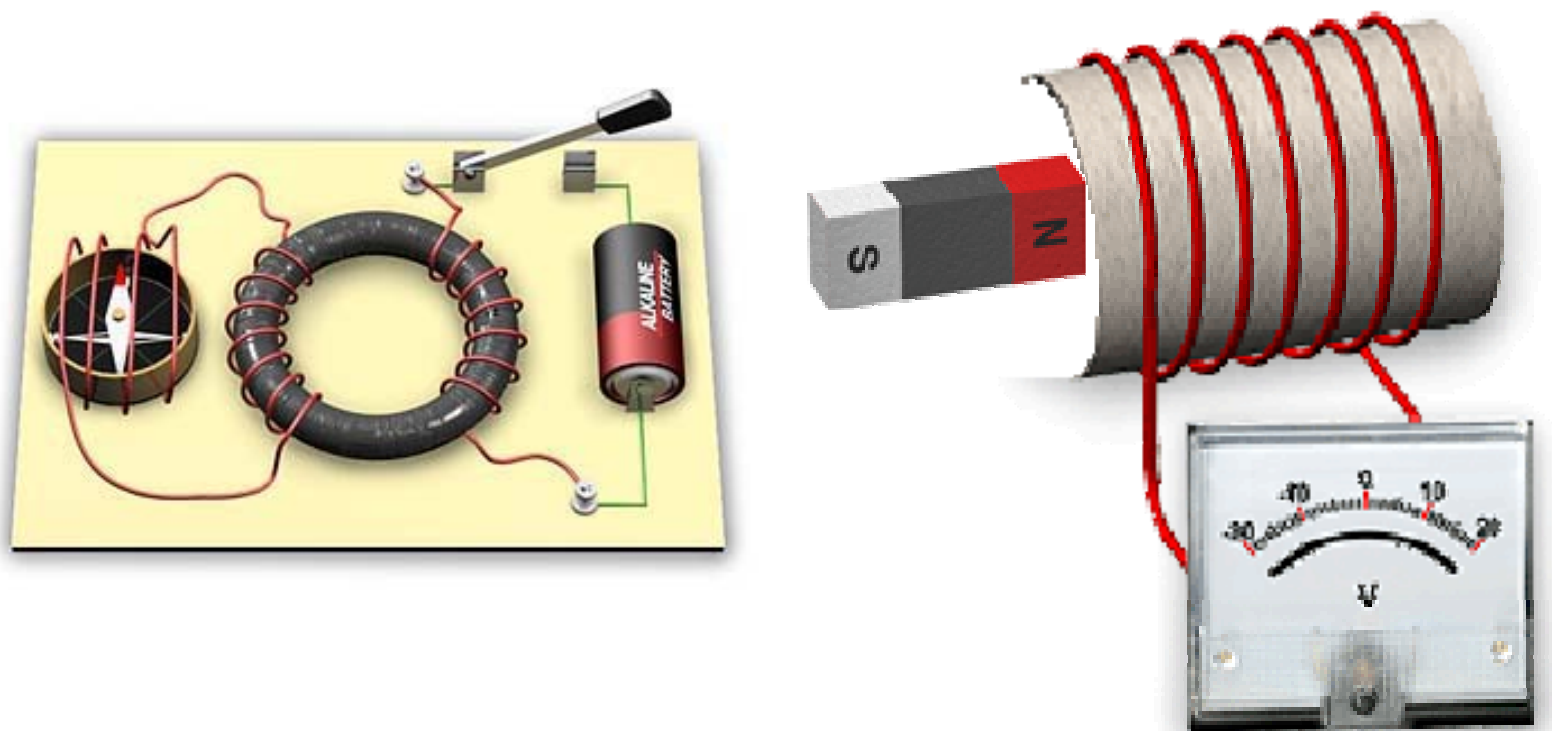
# Fenomene electrice și magnetice variabile în timp

Fenomenul de inducție  
electromagnetică

# Fenomenul de inducție electromagnetică

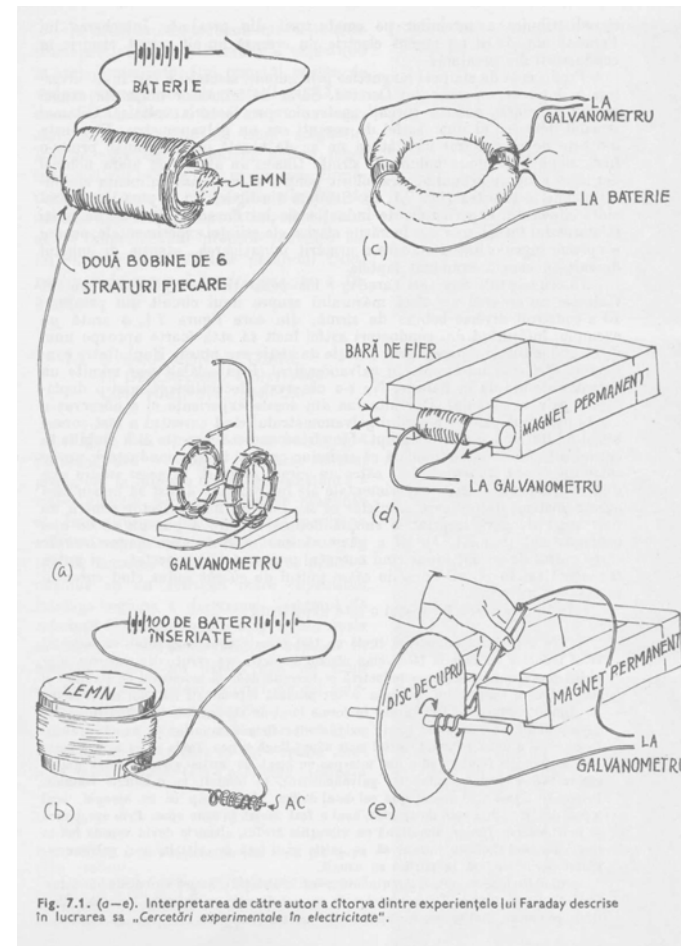
- Curenții produc câmp magnetic. Acesta acționează asupra momentelor magnetice (magneți permanenți, alți curenți)
- Motoare electrice pe această idee ?
- Faraday observă că un câmp magnetic, oricât de intens nu produce curenți electrici. Efectele apar numai când apar modificări.

# Fenomenul de inducție electromagnetică



# Experiențele lui Faraday (1839)

De ce un curent electric nu creează un alt curent electric în conductorii din preajmă?



# Definiție

Fenomenul de apariție a unei t.e.m. Într-un circuit străbătut de un flux magnetic variabil

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu H S \cos \phi$$

t.e.m. de inducție se poate obține prin modificarea oricăruia dintre cei patru termeni.



# Cazuri particulare

- Circuit mobil – inducție magnetică statică
- Circuit fix – inducție magnetică variabilă

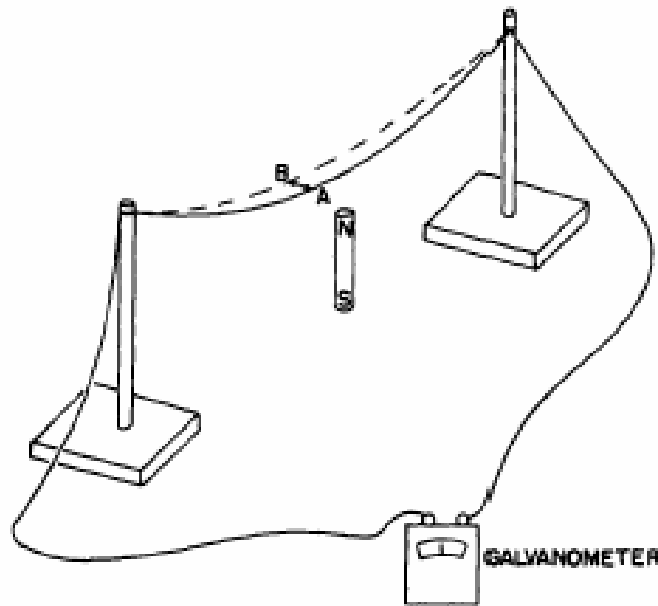


Fig. 16-2. Moving a wire through a magnetic field produces a current, as shown by the galvanometer.

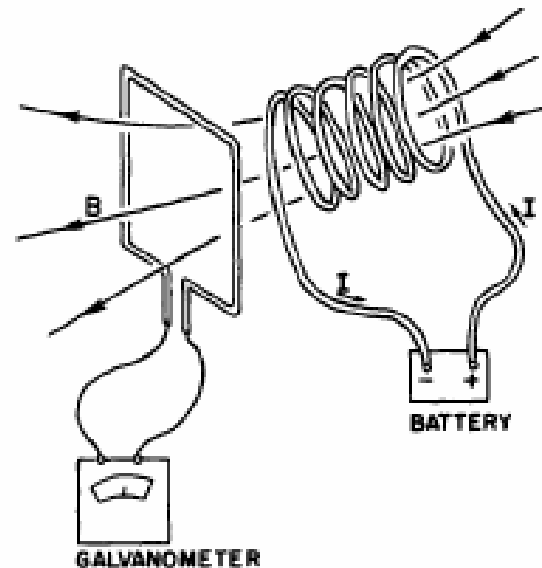


Fig. 16-3. A coil with current produces a current in a second coil if the first coil is moved or if its current is changed.

The magnet produces some vertical magnetic field, and when we push the wire across the field, the electrons in the wire feel a *sideways* force—at right angles to the field and to the motion. The force pushes the electrons along the wire. But why does this move the galvanometer, which is so far from the force? Because when the electrons which feel the magnetic force try to move, they push—by electric repulsion—the electrons a little farther down the wire; they, in turn, repel the electrons a little farther on, and so on for a long distance. An amazing thing.

It was so amazing to Gauss and Weber—who first built a galvanometer—that they tried to see how far the forces in the wire would go. They strung a wire all the way across their city. Mr. Gauss, at one end, connected the wires to a battery (batteries were known before generators) and Mr. Weber watched the galvanometer move. They had a way of signaling long distances—it was the beginning of the telegraph! Of course, this has nothing directly to do with induction—it has to do with the way wires carry currents, whether the currents are pushed by induction or not.

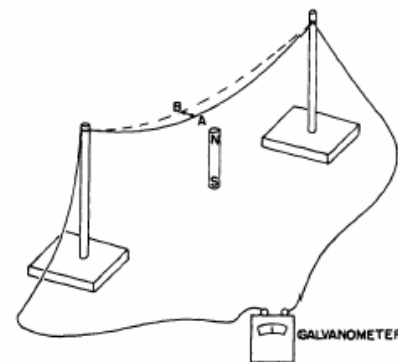


Fig. 16-2. Moving a wire through a magnetic field produces a current, as shown by the galvanometer.

# Motor - generator

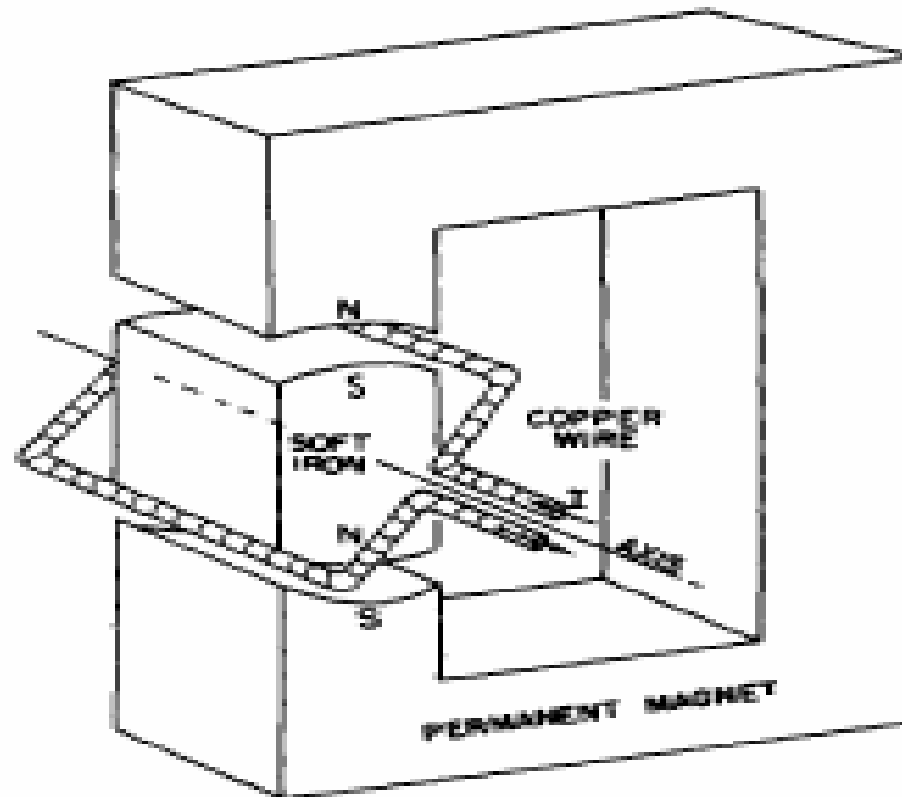


Fig. 16-1. Schematic outline of a simple electromagnetic motor.

# Aplicații practice

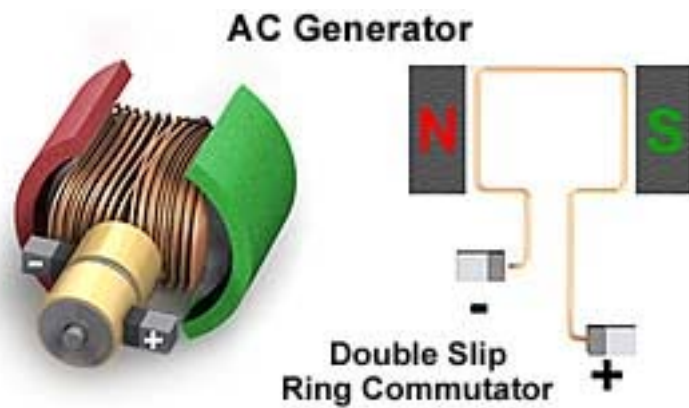


Figure 11

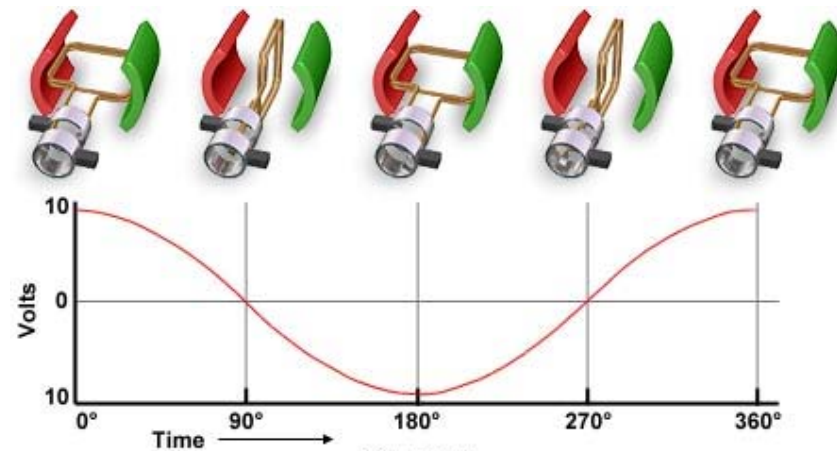
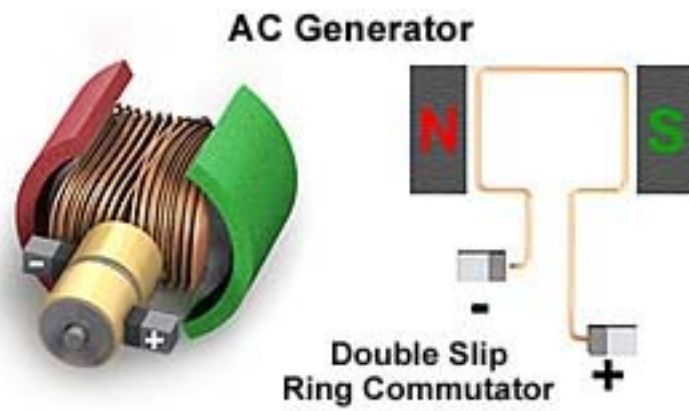
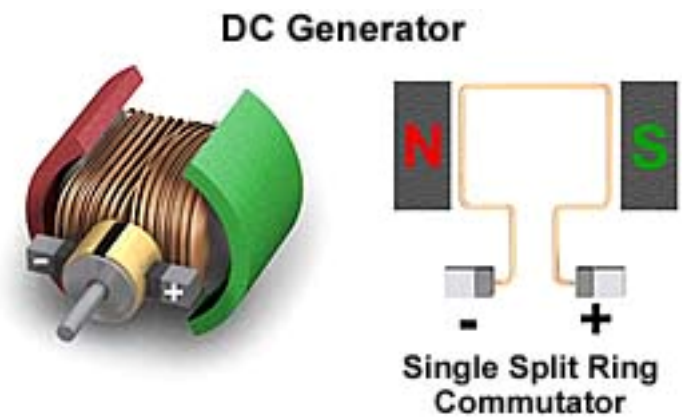


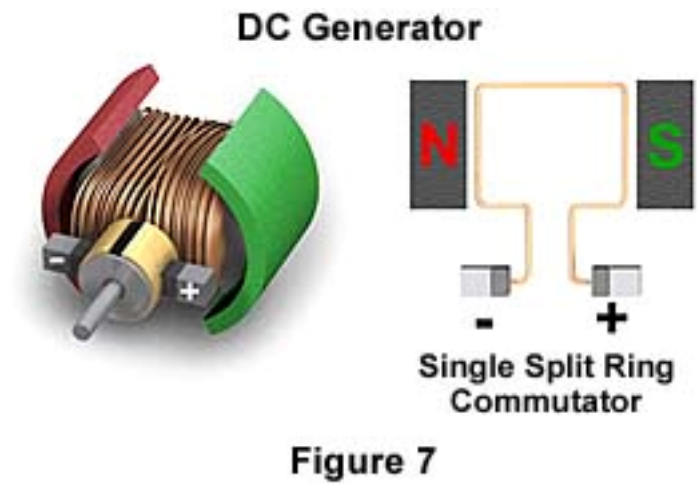
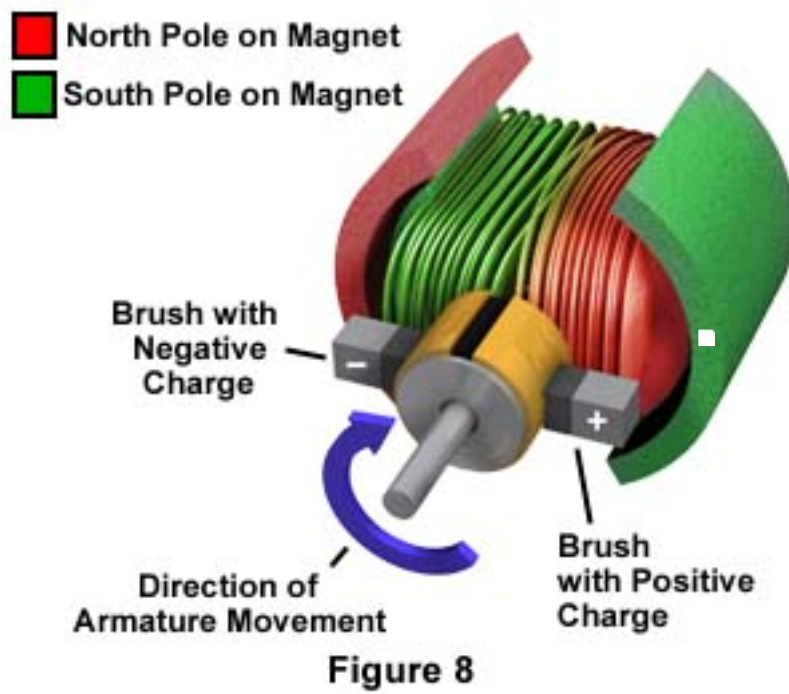
Figure 5



**Figure 11**



**Figure 7**



# Microfon - difuzor

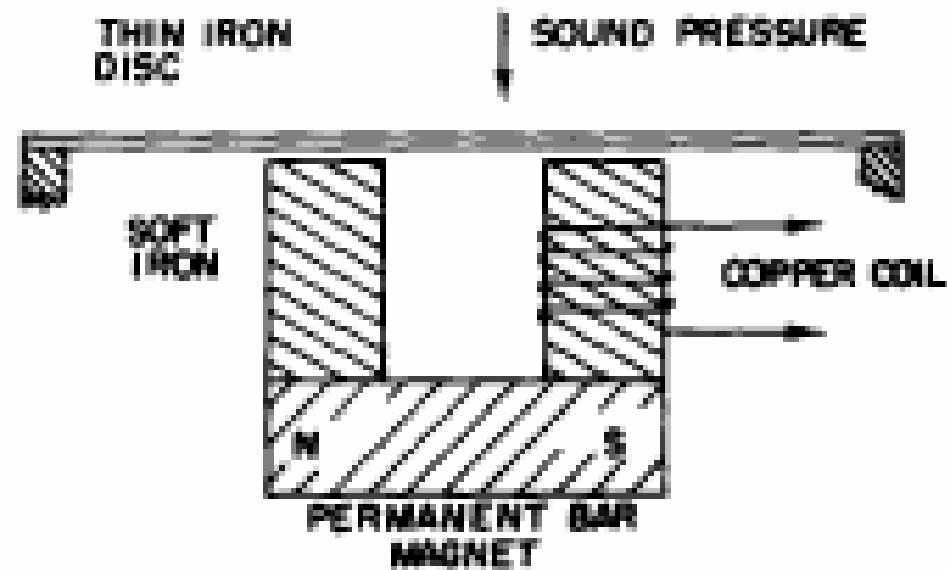


Fig. 16-4. A telephone transmitter or receiver.

# Inducție - autoinducție

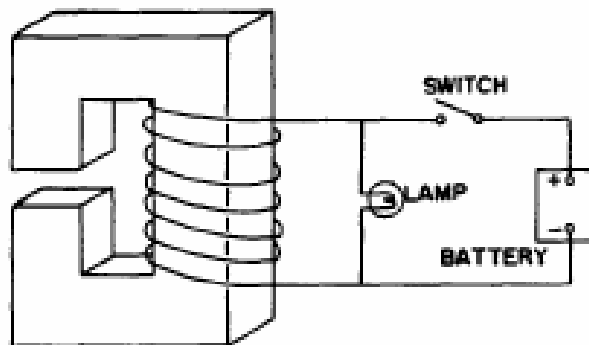


Fig. 16-6. Circuit connections for an electromagnet. The lamp allows the passage of current when the switch is opened, preventing the appearance of excessive emf's.

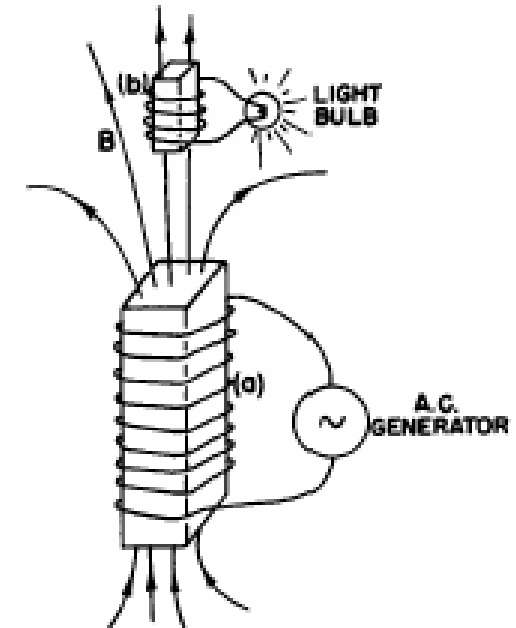


Fig. 16-5. Two coils, wrapped around bundles of iron sheets, allow a generator to light a bulb with no direct connection.



# Forțe care acționează asupra curenților induși

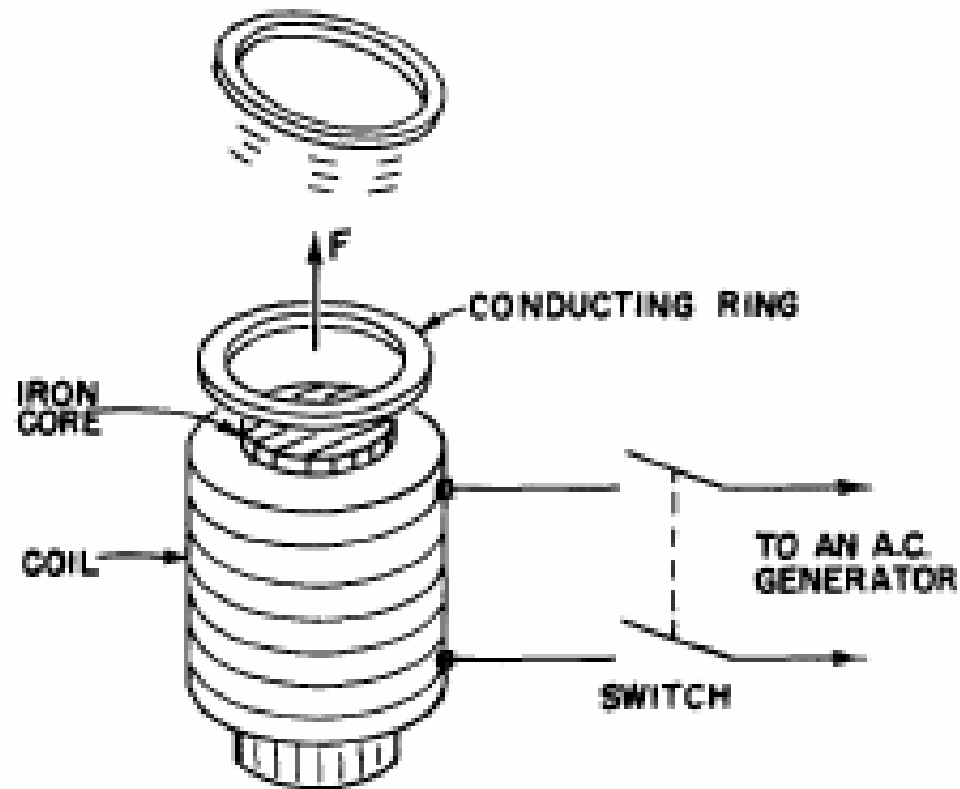


Fig. 16-7. A conducting ring is strongly repelled by an electromagnet with a varying current.

# Curenți turbionari (induși) în conductori masivi

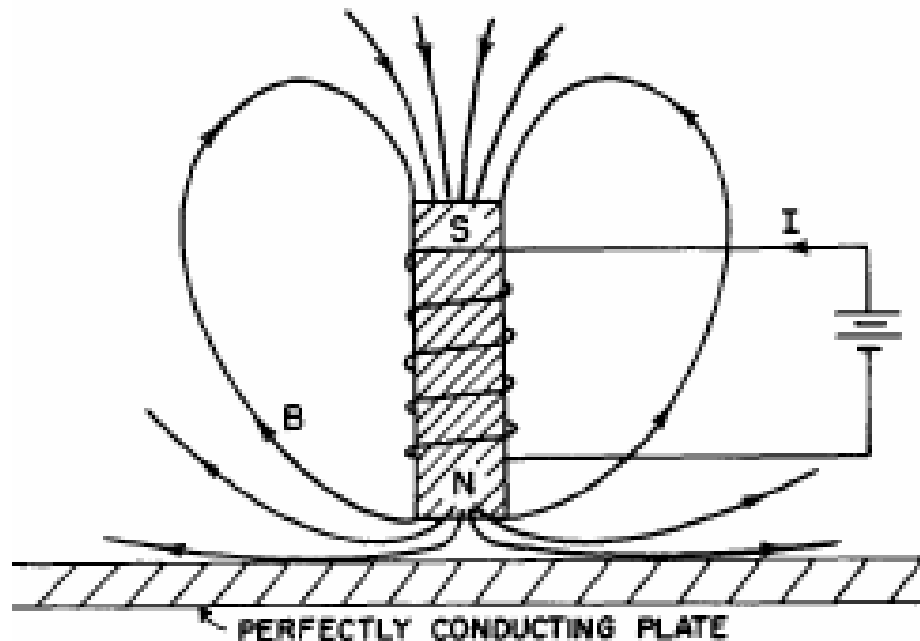


Fig. 16-8. An electromagnet near a perfectly conducting plate.

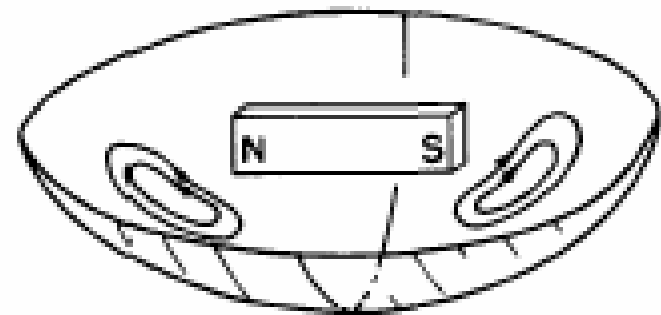


Fig. 16-9. A bar magnet is suspended above a superconducting bowl, by the repulsion of eddy currents.

# Curenți turbionari (Foucault)

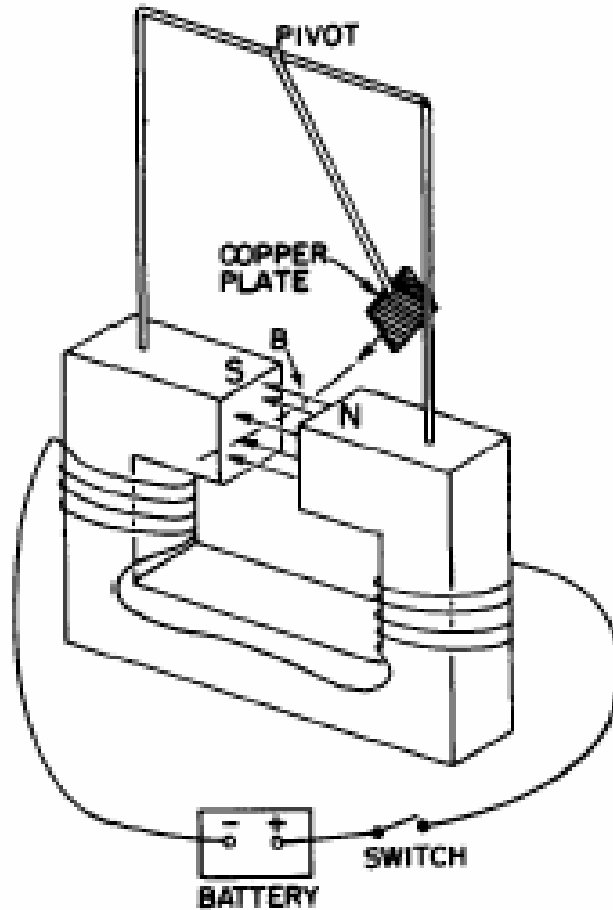


Fig. 16-10. The braking of the pendulum shows the forces due to eddy currents.

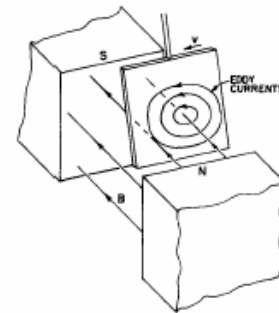


Fig. 16-11. The eddy currents in the copper pendulum.

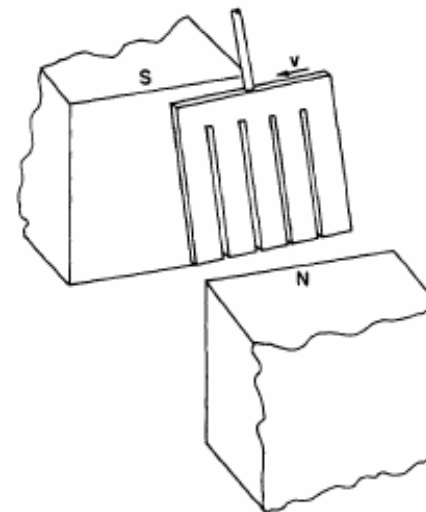
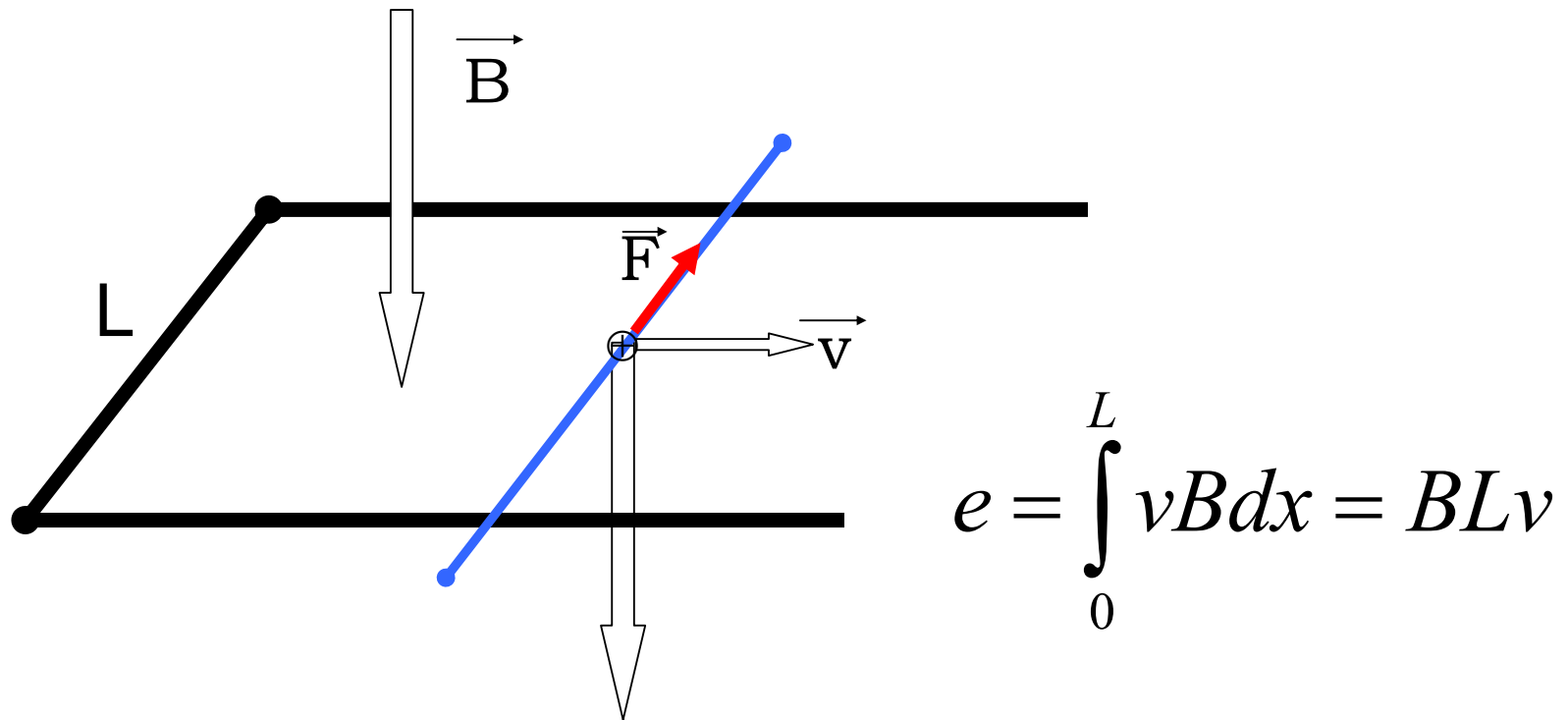


Fig. 16-12. Eddy-current effects are drastically reduced by cutting slots in the plate.

# Aspecte cantitative – legea inducției electromagnetice



# Legea inducției electromagnetice

$$|e| = \int_0^L v B dx = BLv = BL \frac{dy}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$e = - \frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# Câmpul electric

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

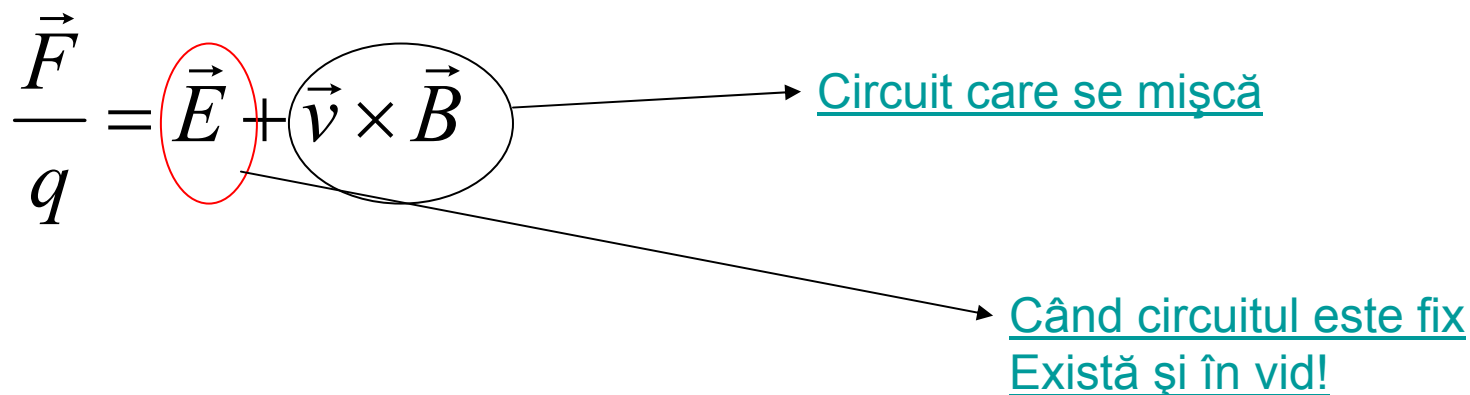
$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} V \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Regula fluxului se aplică și când variază câmpul și când se mișcă circuitul.

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$



Circuit care se mișcă

Când circuitul este fix  
Există și în vid!

Ce câmp se aplică asupra sarcinilor pentru a le pune în mișcare ca urmare a fenomenului de inducție electromagnetică?

[Legea lui Lenz \(film\)](#)

[Câmpul electric indus \(film\)](#)

# Inducția mutuală

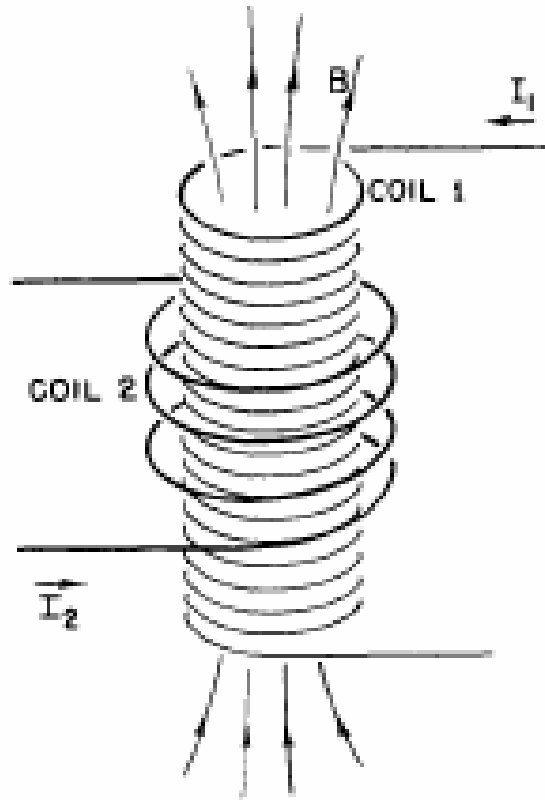


Fig. 17-8. A current in coil 1 produces a magnetic field through coil 2.

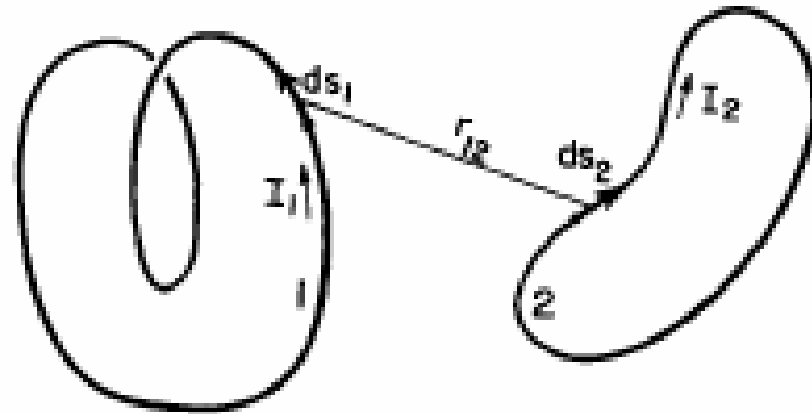
$$B = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{L}$$

$$\varepsilon_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{L} \frac{dI_1}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}; \quad \varepsilon_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$



Fig. 17-9. Any two coils have a mutual inductance  $M$  proportional to the integral of  $ds_1 \cdot ds_2/r_{12}$ .



$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{\{1\}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, da = -\frac{d}{dt} \int_{\{1\}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1$$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \int_{\{1\}} \vec{A} \cdot d\vec{s}_1$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\{2\}} \frac{I_2 d\vec{s}_2}{r_{12}}$$

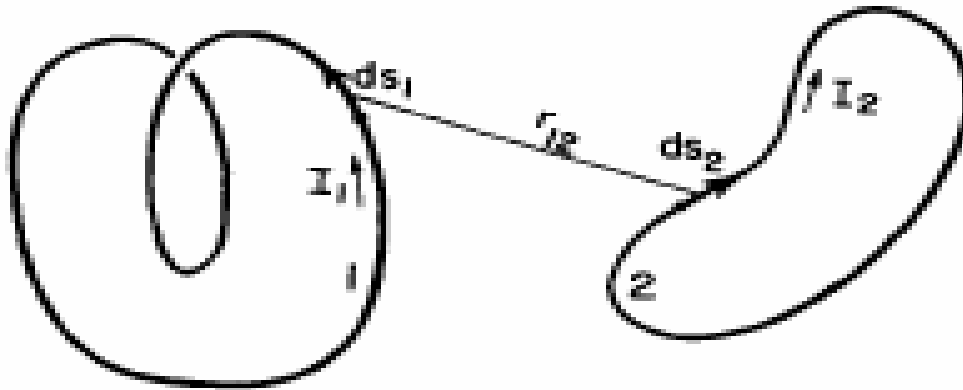
$$\mathcal{E}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \oint_{\{1\}} \oint_{\{2\}} \frac{I_2 d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1}{r_{12}} = M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\{1\}} \oint_{\{2\}} \frac{d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1}{r_{12}}$$

$$M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\{1\}} \oint_{\{2\}} \frac{d\vec{s}_2 \cdot d\vec{s}_1}{r_{12}}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

# Autoinducția

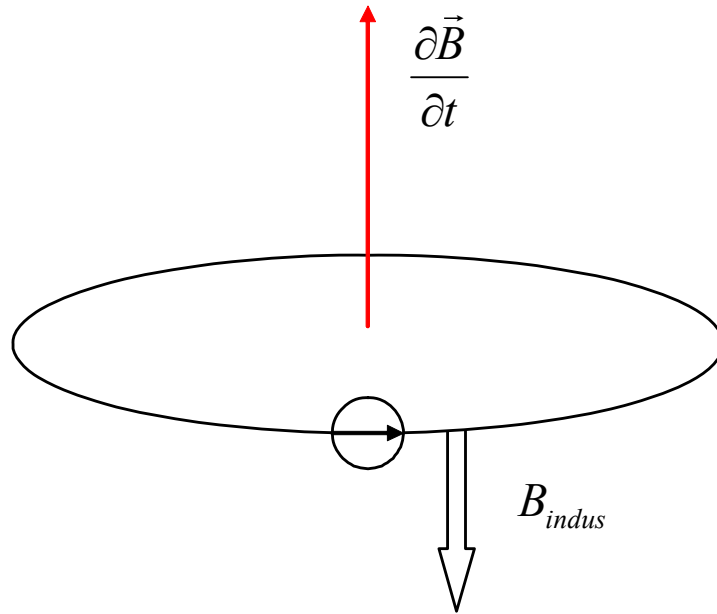


$$\varepsilon_1 = M_{11} \frac{dI_1}{dt} + M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} + M_{22} \frac{dI_2}{dt}$$

$$M_{11} = -L_1; \quad M_{22} = -L_2;$$

# Energia câmpului magnetic



$$dL = -e_{indus} Idt = \frac{d\Phi}{dt} Idt = Id\Phi$$

$$\Phi = LI$$

$$dW = Id\Phi \Rightarrow dW = LI dI \Rightarrow W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int \vec{A} \cdot d\vec{L}$$

$$W = \frac{I}{2} \int \vec{A} \cdot d\vec{L} = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \vec{j} dv$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} dv$$

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} dv$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{H}$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \text{rot} \vec{A} dv - \frac{1}{2} \int \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dv$$

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{H} \cdot \vec{B} dv$$

$$w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Densitatea de energie a câmpului magnetic

# Relația forțe, cupluri, energie

- Lucrul mecanic efectuat de surse:

$$\sum_{i=1}^N I_i d\Phi_i = dW + Fdx$$

$$W(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N L_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i$$



# Cazuri particulare

1.  $\Phi = \text{const.}$

$$0 = (dW)\big|_{\Phi=\text{const.}} + Fdx \Rightarrow F = -\left(\frac{dW}{dx}\right)_{\Phi}$$

2.  $I = \text{const.}$

$$\sum_{i=1}^N I_i d\Phi_i = (dW)\big|_{I=\text{const.}} + Fdx$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i$$

$$\sum_{i=1}^N I_i d\Phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i d\Phi_i + Fdx \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i d\Phi_i = -Fdx \Rightarrow F = \left(\frac{dW}{dx}\right)_I$$

# Cuplul forțelor

*pentru  $x \sim \theta$*

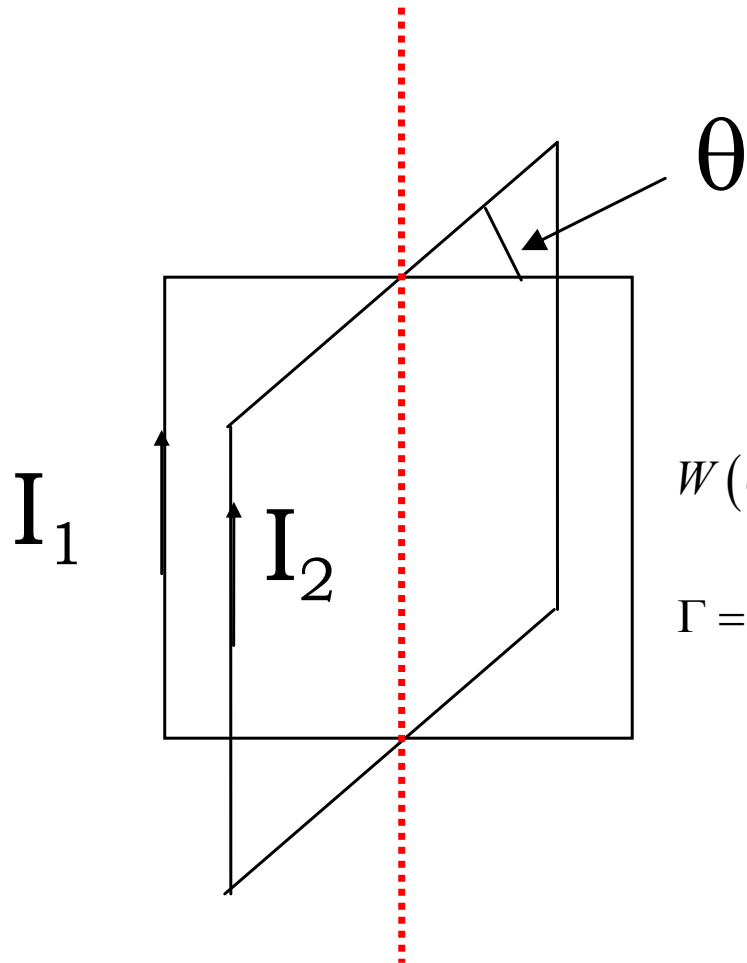
1.  $\Phi = \text{const.}$

$$\Gamma = - \left( \frac{dW}{d\theta} \right)_{\Phi}$$

2.  $I = \text{const.}$

$$\Gamma = \left( \frac{dW}{d\theta} \right)_I$$

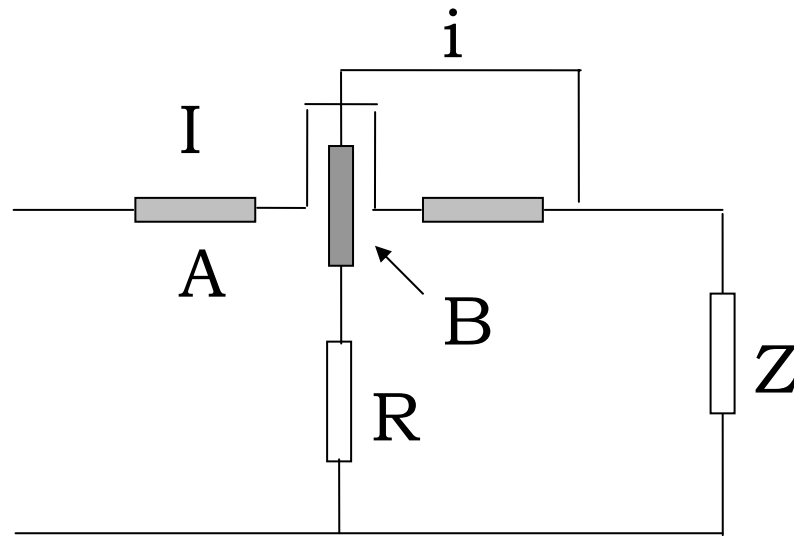
# Aparate electrodinamice



$$W(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 L_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2} [L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2 + 2L_{12}(\theta) I_1 I_2]$$

$$\Gamma = I^2 \frac{dL_{12}}{d\theta} = C\theta \Rightarrow I^2 = \frac{C\theta}{\frac{dL_{12}}{d\theta}}$$

# Wattmetrul



$$\Gamma = Ii \frac{dL_{12}}{d\theta}$$

$$i = \frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{R} P \frac{dL_{12}}{d\theta} = C\theta \Rightarrow P = \frac{C\theta R}{\frac{dL_{12}}{d\theta}}$$

# Circuite electrice în regim tranzitoriu și alternativ

# Generatorul de curent alternativ

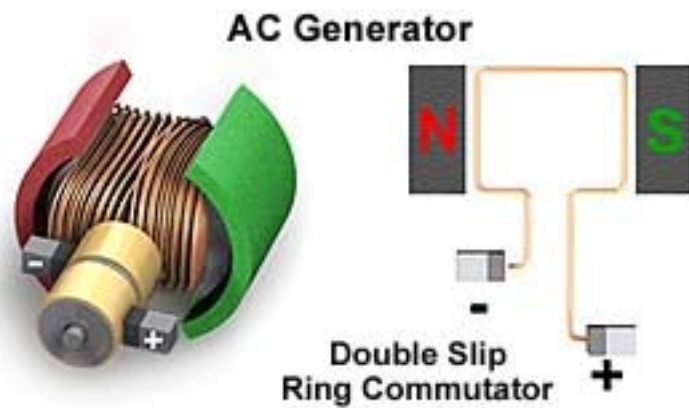


Figure 11

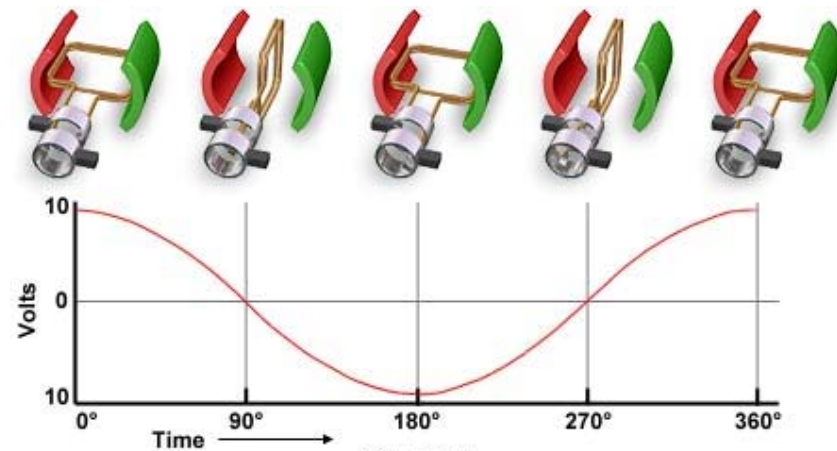


Figure 5

# T.e.m. alternativă

Utilizând fenomenul de inducție electromagnetică, se poate genera relativ simplu tensiune electromotoare. Este cunoscut experimentul în care o bobină este rotită în timp ce se află în câmpul generat de un magnet permanent. În cazul în care se bobina este parte a unui circuit electric și se măsoară intensitatea curentului în acest circuit, se observă că atât timp cât bobina se rotește, în circuit avem un curent electric.

Pentru a trece la evaluări cantitative privind modul de variație al curentului în circuit, trebuie să identificăm mai întâi elementele esențiale ale sistemului.

Pentru început este bine să calculăm tensiunea electromotoare indusă în bobina aflată în rotație. Pentru aceasta avem la dispoziție legea inducției electromagnetice:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1)$$

unde  $e$  este tensiunea electromotoare indusă,  $\Phi$  este fluxul inducției magnetice prin circuit iar  $t$  este timpul.

# Variația fluxului

Pentru a avea o expresie simplă a tensiunii electromotoare suntem nevoiți să utilizăm o expresie simplă pentru dependența de timp a fluxului inducției magnetice. Neglijăm din acest motiv variația inducției magnetice în zona în care se rotește bobina și considerăm în plus că toate spirele au suprafețele egale ca mărime și paralele între ele. În acest caz fluxul se poate scrie sub forma:

$$\Phi = NBS \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

unde  $N$  este numărul de spire ale bobinei,  $B$  este inducția magnetică în care se află bobina în orice moment,  $S$  este suprafața fiecărei spire,  $\omega$  este viteza unghiulară (considerată uniformă) cu care se rotește bobina, iar  $\varphi_0$  este o fază inițială a rotației bobinei. Vectorul inducție magnetică face cu normala la suprafața spirelor unghiul:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (3)$$



# T.e.m. indusă

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[NBS \cos(\omega t + \varphi_0)\right] = \omega NBS \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Aplicând legea inducției electromagnetice, obținem o tensiune electromotoare variabilă în timp după o lege sinusoidală:

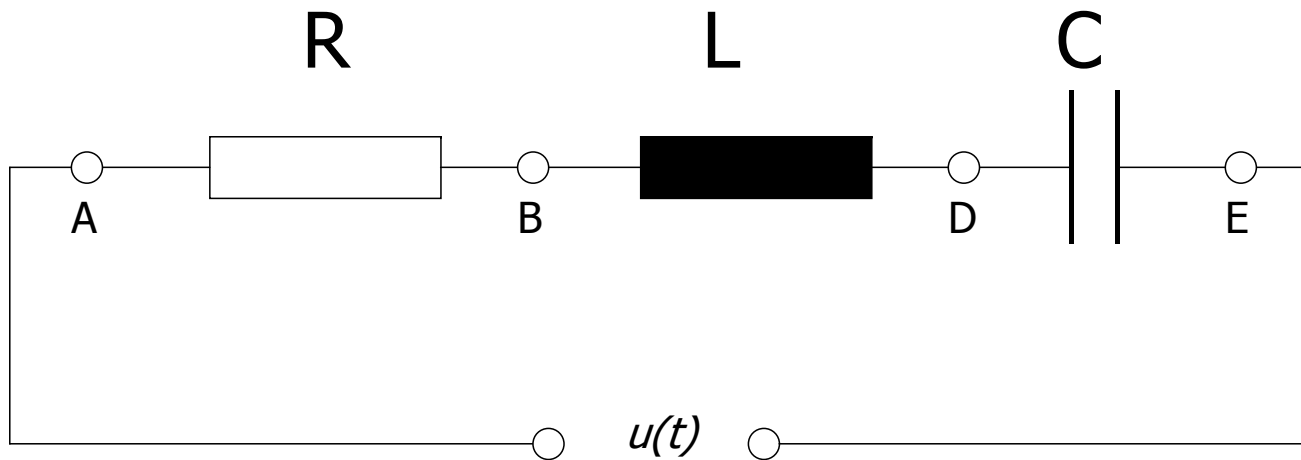
$$e = NBS\omega \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

## Problema 1

Estimați efectul asupra tensiunii electromotoare induse dacă inducția magnetică nu ar avea aceeași valoare (și/sau) orientare în toată zona în care se rotește bobina.

# Circuit RLC in curent alternativ

Considerăm un circuit compus dintr-o rezistență ohmică  $R$ , o bobină cu inductanță proprie  $L$  și un condensator de capacitate  $C$ , căruia i se aplică o tensiune sinusoidală  $u(t) = U_m \sin \omega t$ .



# Ecuatia pentru circuitul RLC serie

Expresiile tensiunilor pe elementele circuitului sunt:

$$\begin{cases} u_R = u_{AB} = Ri \\ u_L = u_{BD} = -e = L \frac{di}{dt} \\ u_C = u_{DE} = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases} \quad (5)$$

unde  $i$ ,  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$  sunt valorile instantanee ale curentului prin circuit, respectiv ale căderilor de tensiune de pe elementele circuitului.

Din expresia legii lui Ohm pentru valori instantanee ale tensiunilor pe elementele de circuit,  $u = u_R + u_L + u_C$  se obține ecuația diferențială:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \sin \omega t \quad (6)$$

# Forma finală a ecuației

Din expresia legii lui Ohm pentru valori instantanee ale tensiunilor pe elementele de circuit,  $u = u_R + u_L + u_C$  se obține ecuația diferențială:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \sin \omega t \quad (6)$$

care se poate pune sub forma:

$$\ddot{q} + 2\delta_o \dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{U_m}{L} \sin \omega t \quad (7)$$

în care s-au făcut notațiile:

$$\begin{cases} 2\delta_o = \frac{R}{L} \\ \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \quad (8)$$

# Soluția

Soluția ecuației (7) este:

$$q = q_o + q_p \quad (9)$$

în care  $q_o$  reprezintă soluția generală a ecuației omogene (vezi Anexa I):

$$q_o = e^{-\delta_o t} \begin{cases} K_1 sh(\delta t) + K_2 ch(\delta t), & \delta_o > \omega_o (R > 2Z_c) \\ K_3 t + K_4, & \delta_o = \omega_o (R = 2Z_c) \\ K_5 sin(\Omega t) + K_6 cos(\Omega t), & \delta_o < \omega_o (R < 2Z_c) \end{cases} \quad (10)$$

unde:

$$\begin{aligned} \delta &= \sqrt{\delta_o^2 - \omega_o^2}, & \delta_o > \omega_o \\ \Omega &= \sqrt{\omega_o^2 - \delta_o^2}, & \omega_o > \delta_o \end{aligned} \quad (11)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

iar  $q_p$  este o soluție particulară a ecuației neomogene, care se caută sub forma:

$$q_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (12)$$

# Problema cu condiții inițiale

Rezolvarea problemei cu condiții inițiale:

$$\begin{cases} \ddot{q} + 2\delta_o \dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{U_m}{L} \sin \omega t \\ q(t=0) = 0; \quad \dot{q}(t=0) = 0 \end{cases}$$

# Soluția ecuației omogene

$$\ddot{q} + 2\delta_o \dot{q} + \omega_o^2 q = 0$$

este:

$$q_o = e^{-\delta_o t} \begin{cases} K_1 sh(\delta t) + K_2 ch(\delta t), & \delta_o > \omega_o (R > 2Z_c) \\ K_3 t + K_4, & \delta_o = \omega_o (R = 2Z_c) \\ K_5 \sin(\Omega t) + K_6 \cos(\Omega t), & \delta_o < \omega_o (R < 2Z_c) \end{cases}$$

unde:

$$\delta = \sqrt{\delta_o^2 - \omega_o^2}, \quad \delta_o > \omega_o$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \delta_o^2}, \quad \omega_o > \delta_o$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

# Soluția ecuației neomogene (1)

Rezolvarea problemei cu condiții inițiale:

$$\begin{cases} \ddot{q} + 2\delta_o \dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{U_m}{L} \sin \omega t \\ q(t=0) = 0; \dot{q}(t=0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Soluția particulară a ecuației neomogene se caută de forma:

$$q_{part} = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Introducem în (A.1) derivatele:

$$\dot{q}_{part} = \omega (A \cos \omega t - B \sin \omega t)$$

$$\ddot{q}_{part} = -\omega^2 (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$



# Soluția ecuației neomogene (2)

$$-\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) + 2\delta_o\omega(A\cos\omega t - B\sin\omega t) + \omega_o^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = \frac{U_m}{L}\sin\omega t$$

Egalând coeficienții lui  $\sin\omega t$  și  $\cos\omega t$ , găsim:

$$\begin{cases} -\omega^2 A - 2\delta_o\omega B + \omega_o^2 A = \frac{U_m}{L} \\ -\omega^2 B + 2\delta_o\omega A + \omega_o^2 B = 0 \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} A = \frac{U_m}{L} \frac{\omega_o^2 - \omega^2}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2\omega^2} \\ B = -\frac{U_m}{L} \frac{2\delta_o\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2\omega^2} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

# Soluția ecuației neomogene (3)

Înlocuim în  $q_{part}$  și obținem:

$$\begin{aligned} q_{part} &= \frac{U_m}{L} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2 \omega^2} [(\omega_o^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\delta_o \omega \cos \omega t] = \\ &= -\frac{U_m}{L} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2 \omega^2} [(\omega^2 - \omega_o^2) \sin \omega t + 2\delta_o \omega \cos \omega t] \end{aligned}$$

# Soluția ecuației neomogene (4)

Notând:

$$tg\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\delta_o\omega}, \quad \text{avem:}$$

$$\begin{aligned} q_{part} &= -\frac{U_m}{L} \frac{2\delta_o\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2\omega^2} [tg\varphi \sin\omega t + \cos\omega t] = \\ &= -\frac{U_m}{L} \frac{2\delta_o\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2\omega^2} \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\cos\varphi} \end{aligned}$$

Dar:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}} = \frac{2\delta_o\omega}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2\omega^2}}$$

Deci:

$$q_{part} = -\frac{U_m}{L} \frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_o^2\omega^2}} \cos(\omega t - \varphi)$$

# Soluția ecuației neomogene (5)

Dar:

$$\frac{1}{L[(\omega_o^2 - \omega^2) + 4\delta_o^2 \omega^2]^{1/2}} = \frac{1}{L\left[\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{\omega\left[\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2 + R^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{Z_\omega}$$

Se obține:

$$\begin{cases} q_{part} = -\frac{U_m}{Z_\omega} \cos(\omega t - \varphi) \\ \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{cases} \quad (A.8)$$

# Soluția generală

Soluția ecuației (A.1) este:

$$q(t) = q_o + q_{part} \quad .$$

După un timp suficient de lung, regimul tranzitoriu descris de  $q_o$  dispăre ( $e^{-\delta_o t} \rightarrow 0$  pentru  $t \rightarrow \infty$ ) și se instalează regimul permanent descris de  $q_{part}$ . Pentru soluția staționară nu mai este necesară determinarea constantelor de integrare care apar în (A.3). Regimul permanent este descris de soluția:

$$q(t) = -\frac{U_m}{Z_\omega} \cos(\omega t - \varphi) \quad (A.9a)$$

$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \quad (A.9b)$$

# Soluția staționară

$$q(t) = -\frac{U_m}{Z\omega} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = Ri(t) = \frac{RU_m}{Z} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_L(t) = L\ddot{q}(t) = \frac{L\omega U_m}{Z} \cos(\omega t - \varphi) = X_L \frac{U_m}{Z} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = -\frac{U_m}{C\omega Z} \cos(\omega t - \varphi) = X_C \frac{U_m}{Z} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

# Regimul permanent

În toate cele trei cazuri, soluția ecuației omogene descrie regimul tranzitoriu și tinde rapid la zero când  $t \rightarrow \infty$ . Practic, după un timp suficient de lung, regimul permanent (de oscilații forțate) este descris de soluția (12), în care sursa exterioară  $u(t) = U_m \sin \omega t$  impune curentului din circuit pulsația acestuia.

Constantele A și B se determină din condiția ca (12) să fie soluție a ecuației neomogene (17); intensitatea curentului din circuit este de forma:

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin(\omega t \pm \varphi) \quad (13)$$

sau:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t \pm \varphi) \quad (14)$$

# Impedanța

$$i(t) = I_m \sin(\omega t \pm \varphi)$$

în care:

$$\varphi = \arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

este defazajul dintre curent și tensiune.

Mărimea:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

este impedanța circuitului RLC serie.



# Impedanța, rezonanța

Se observă că atunci când frecvența sursei devine egală cu frecvența proprie a circuitului:

$$\nu_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (17)$$

curentul are valoarea maximă:

$$I_o = \frac{U}{R} \quad (18)$$

În acest caz circuitul RLC este în regim de rezonanță cu sursa exterioară. Transferul de energie de la sursă la circuit este maxim.

La rezonanță,

$$L\omega_o = \frac{1}{C\omega_o} \quad (19)$$

impedanța circuitului fiind:

$$Z_o = R \quad (20)$$

iar defazajul dintre curent și tensiune se anulează.

# Factor de calitate

Curentul scade la  $I_0 / \sqrt{2}$  pentru două frecvențe  $\nu_1, \nu_2$ .

Rezonanța este cu atât mai pronunțată cu cât diferența  $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$  este mai mică. Mărimea care descrie caracterul mai mult sau mai puțin pronunțat al rezonanței se numește factor de calitate,  $Q$ , exprimat prin relația:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu} = \frac{1}{Q} \quad (21)$$

$Q$  este și factor de supratensiune, fiind egal cu raportul dintre tensiunea pe elementele reactive și tensiunea totală în circuit, la rezonanță:

$$Q = \frac{U_L}{U} \Big|_{\nu=\nu_0} = \frac{U_C}{U} \Big|_{\nu=\nu_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (22)$$

# Metoda numerelor complexe

## **Analiza comportării circuitelor în regim cvasistaționar alternativ cu ajutorul numerelor complexe**

O metodă des utilizată în analiza circuitelor aflate în regim staționar (după atenuarea regimului tranzitoriu) este cea a numerelor complexe. Această metodă se bazează pe ideea căutării soluțiilor de tip armonic ale ecuației circuitului:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = u(t). \quad (6')$$

# Importanța soluției armonice

Soluția găsită are nu numai importanța oricărei soluții particulare a ecuației circuitului. În condițiile în care orice soluție se poate dezvolta în serie Fourier (se poate exprima ca o superpoziție de soluții de tip armonic) este important să cunoaștem modul în care se comportă circuitul când este excitat cu un semnal perfect armonic.

Se știe că mărimile armonice se pot exprima în formă complexă. Utilizând această formă de exprimare trebuie să înțelegem care este esența acestui mod de lucru. Mărimile fizice cu care operăm, curentul electric, sarcina electrică, tensiunea, etc., sunt mărimi reale. Pentru a obține aceste mărimi reale, în condițiile în care în (6') lucrăm cu mărimi complexe, trebuie să calculăm din soluția complexă rezultată fie partea reală a tuturor mărimilor fie cea imaginară. Atât partea reală a soluției complexe cât și cea imaginară sunt soluții ale ecuației (6').

# Metoda numerelor complexe

Să considerăm, de exemplu,

$$u(t) = \underline{u} = \underline{U}_m \exp(j\omega t)$$

$$i = \underline{i} = \underline{I}_m \exp(j\omega t)$$

$$\frac{di}{dt} = j\omega \underline{i}$$

$$q = \int i dt = \left( \frac{1}{j\omega} \right) \underline{i}$$

unde  $\underline{U}_m$  și  $\underline{I}_m$  reprezintă amplitudinile complexe ale tensiunii respectiv curentului, și care se pot exprima sub forma complexă:

$$\underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi_u)$$

și respectiv,

$$\underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi_i).$$

# Impedanța complexă

De cele mai multe ori, în practică se utilizează nu marimile maxime ci cele efective (rezultate prin împărțirea la  $\sqrt{2}$ ) notate fără indicele "m".

Înlocuind în (6') aceste expresii și divizând prin  $\exp(j\omega t)$  obținem:

$$\underline{I}_m \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_m.$$

Se introduce mărimea numită impedanța complexă prin relația:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}},$$

care pentru circuitul RLC serie are expresia:

$$\underline{Z} = \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

# Reactanțele complexe

$$Z = \sqrt{\underline{Z}^* \underline{Z}^c} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

unde cu  $\underline{Z}^c$  am notat conjugata complexă a impedanței. Faza impedanței complexe dă chiar defazajul între tensiune și curent.

Dacă aplicăm aceeași metodologie în cazurile particulare în care circuitul are doar rezistor, inductanță sau capacitor, obținem impedanțele complexe ale acestor elemente de circuit (numite rezistență, reactanță inductivă și respectiv, reactanță capacitivă):

$$\underline{Z}_R = R,$$

$$\underline{Z}_L \equiv \underline{X}_L = j\omega L,$$

$$\underline{Z}_C \equiv \underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C}.$$

# Probleme

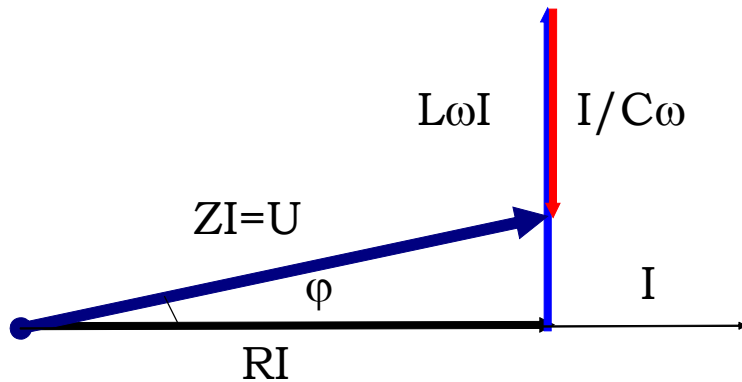
## **Tema 2**

2.1 Realizați un program în MAPLE prin care să explicați modul în care se calculează puterea în circuitele de curent alternativ. Explicați noțiunile de putere instantanee, activă, reactivă și aparentă.

2.2 Analizați modul în care se comportă un circuit când este alimentat de la o sursă care furnizează o tensiune electromotoare  $u(t) = U_m [\sin(\omega t)]^2$ .



# Puterea în circuite AC



$$i = I_0 \sin(\omega t)$$

$$u_R = I_0 R \sin(\omega t)$$

$$u_L = I_0 \omega L \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$u_C = I_0 / (\omega C) \sin(\omega t - \pi/2)$$

$$I_0 = U_0 / Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$$

$$u = I_0 Z \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

# Puterea instantanee

$$i = I_0 \sin(\omega t)$$

$$u_R = I_0 R \sin(\omega t)$$

$$u_L = I_0 \omega L \sin(\omega t + \pi / 2)$$

$$u_C = I_0 / (\omega C) \sin(\omega t - \pi / 2)$$

$$I_0 = U_0 / Z$$

$$u = I_0 Z \sin(\omega t + \varphi)$$

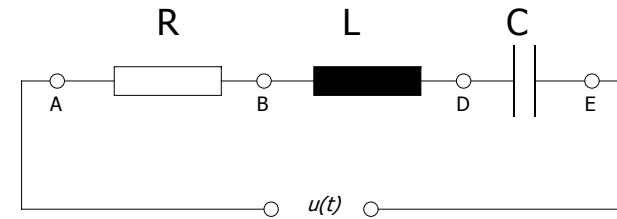
$$p_R = u_R i = R I_0^2 \sin^2(\omega t)$$

$$p = ui$$

# Regim lent variabil

- Circuite în curent alternativ
  - Metoda analitică
  - Metoda fazorială
  - Metoda numerelor complexe

# Metoda analitică



$$\begin{cases} u_R = u_{AB} = Ri \\ u_L = u_{BD} = -e = L \frac{di}{dt} \\ u_C = u_{DE} = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases}$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_m \sin \omega t$$

$$\ddot{q} + 2\delta_o \dot{q} + \omega_o^2 q = \frac{U_m}{L} \sin \omega t$$

$$\begin{cases} 2\delta_o = \frac{R}{L} \\ \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \end{cases}$$

# Metoda analitică

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$q(t) = -\frac{U_m}{Z\omega} \cos(\omega t - \varphi)$$

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

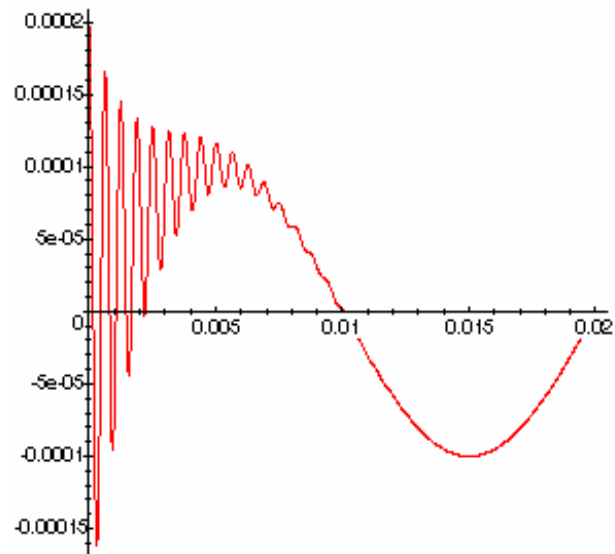
$$i(t) = \dot{q}(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$u_R(t) = Ri(t) = \frac{RU_m}{Z} \sin(\omega t - \varphi)$$

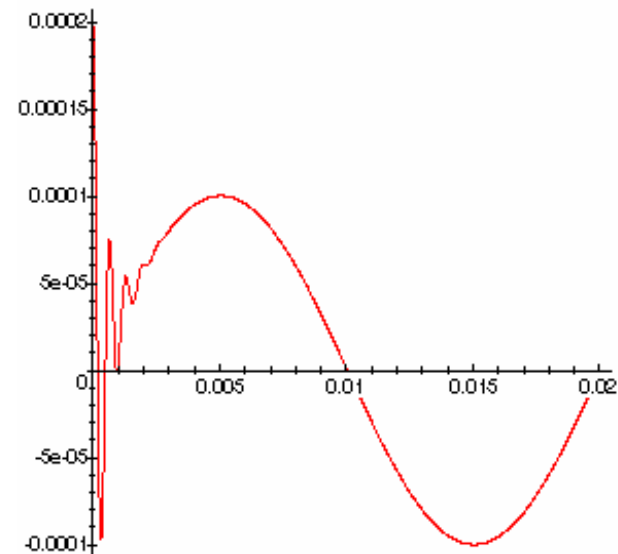
$$u_L(t) = L\ddot{q}(t) = \frac{L\omega U_m}{Z} \cos(\omega t - \varphi) = X_L \frac{U_m}{Z} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = -\frac{U_m}{C\omega Z} \cos(\omega t - \varphi) = X_C \frac{U_m}{Z} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

# Rezolvarea ecuației diferențiale

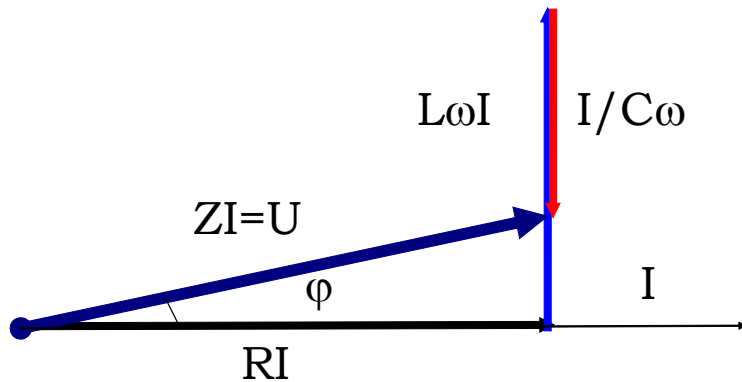


$R=10 \, \Omega$



$R=40 \, \Omega$

# Metoda fazorială



$$i = I_0 \sin(\omega t)$$

$$u_R = I_0 R \sin(\omega t)$$

$$u_L = I_0 \omega L \sin(\omega t + \pi / 2)$$

$$u_C = I_0 / (\omega C) \sin(\omega t - \pi / 2)$$

$$I_0 = U_0 / Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / (\omega C))^2}$$

$$u = I_0 Z \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - 1 / (\omega C)}{R}$$

# Metoda numerelor complexe

$$u(t) = \underline{u} = \underline{U}_m \exp(j\omega t)$$

$$i = \underline{i} = \underline{I}_m \exp(j\omega t)$$

$$\frac{di}{dt} = j\omega \underline{i}$$

$$q = \int i dt = \left( \frac{1}{j\omega} \right) \underline{i}$$

$$\underline{I}_m \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_m$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$Z = \sqrt{\underline{Z} * \underline{Z}^c} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

|   |
|---|
| $\underline{Z}_R = R$ $\underline{Z}_L \equiv \underline{X}_L = j\omega L$ $\underline{Z}_C \equiv \underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$ |
|---|



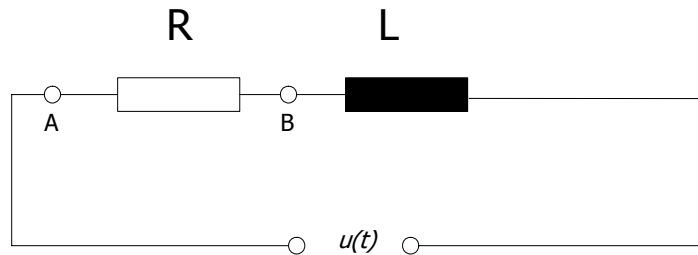
# Aplicații

- Circuitul RLC paralel
- Puterea în circuite de curent alternativ
- Rezonanța RLC serie
- Transmisia energiei electrice

# Regimul tranzitoriu

- RL
- RC
- RLC ...

# RL



$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_0$$

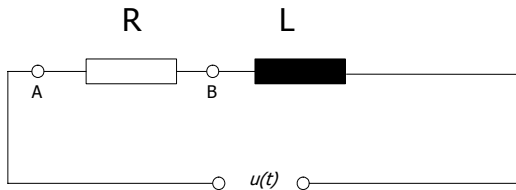
$$i(t = 0) = 0$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + k \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

$$t = 0, i = 0 \Rightarrow k = -\frac{U_0}{R}$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \right]$$

# RL



$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

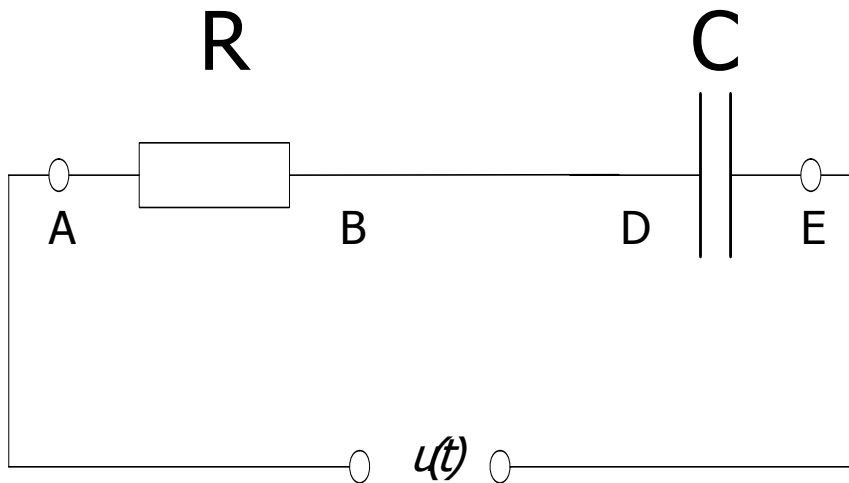
$$i(t = 0) = I$$

$$i(t) = k \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

$$t = 0, i = I \Rightarrow k = I$$

$$i(t) = I \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

# RC



$$Ri + \frac{q}{C} = U_0; i = \frac{dq}{dt}$$

$$q(t=0) = 0$$

$$q(t) = CU_0 + k \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$t=0, q=0 \Rightarrow k = -CU_0$$

$$q(t) = CU_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

# RLC regim tranzitoriu

- Soluție analitică
- Soluție numerică

# Curentul de deplasare (1)

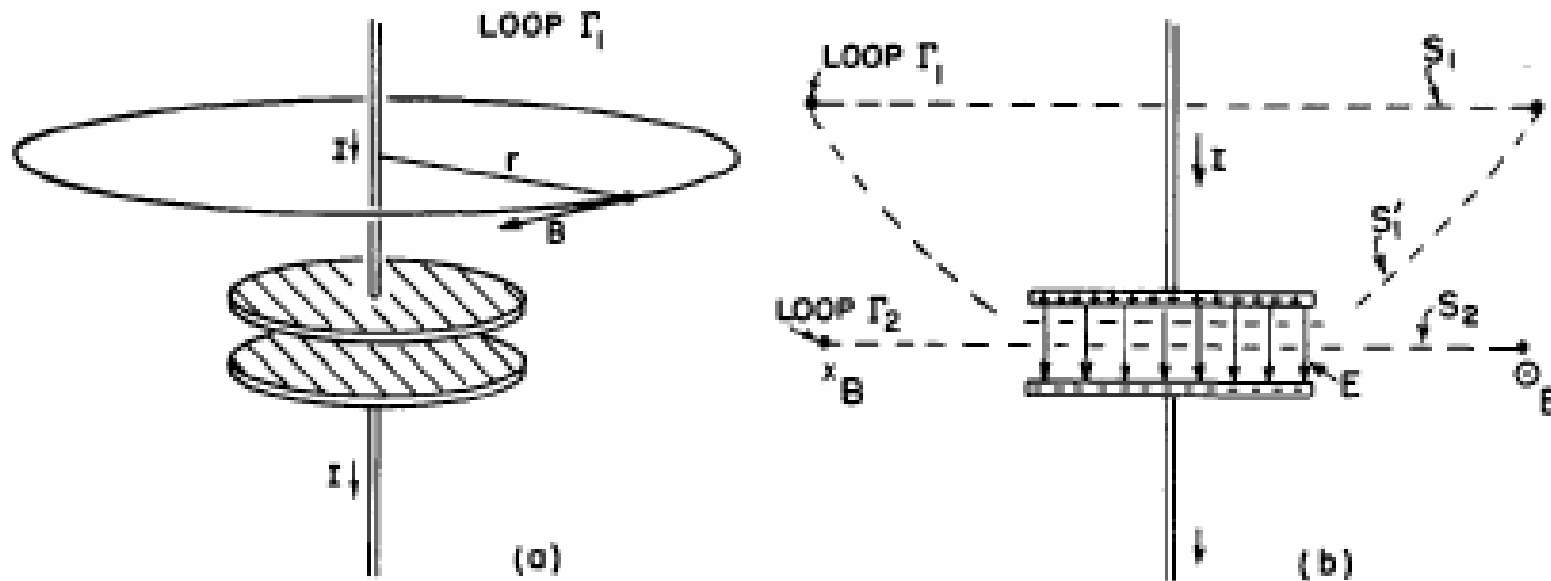


Fig. 18-2. The magnetic field near a charging capacitor.

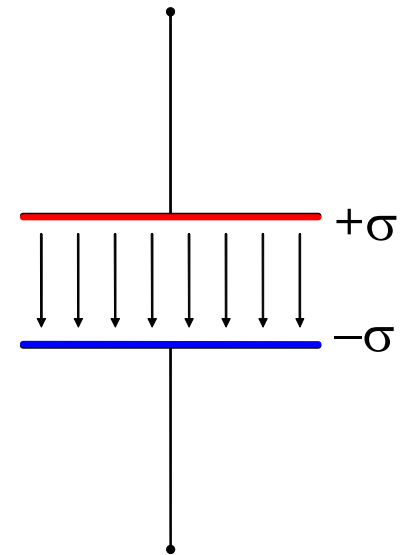
□ [Curentul de deplasare](#)

# Curentul de deplasare

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow D_n = \epsilon_0 E_n = \sigma$$

$$D = \sigma$$

$$I_d = \frac{\partial Q}{\partial t} = S \frac{\partial \sigma}{\partial t} = S \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$





# Curentul de deplasare (2)

$$(th.Ampere) \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$(ec.continuitate) \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int \rho dv \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = - \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{j} dv \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \operatorname{div} \vec{D}}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

# Ecuatiile lui Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

**Table 18-1 Classical Physics**

**Maxwell's equations**

$$\text{I. } \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Flux of } E \text{ through a closed surface}) = (\text{Charge inside})/\epsilon_0$$

$$\text{II. } \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{Line integral of } E \text{ around a loop}) = - \frac{d}{dt} (\text{Flux of } B \text{ through the loop})$$

$$\text{III. } \nabla \cdot B = 0 \quad (\text{Flux of } B \text{ through a closed surface}) = 0$$

$$\text{IV. } c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} \quad c^2 (\text{Integral of } B \text{ around a loop}) = (\text{Current through the loop})/\epsilon_0 + \frac{\partial}{\partial t} (\text{Flux of } E \text{ through the loop})$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Conservation of charge} \\ \nabla \cdot j = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{Flux of current through a closed surface}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{Charge inside}) \end{array} \right]$$

**Force law**

$$F = q(E + v \times B)$$

**Law of motion**

$$\frac{d}{dt} (p) = F, \quad \text{where} \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{Newton's law, with Einstein's modification})$$

**Gravitation**

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_r$$

# Soluția sistemului ec. Maxwell

*necunoscute...  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}, \rho$  (16 necunoscute)*

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Relații constitutive  
(de material)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right. \quad \text{Nu sunt independente}$$

# Alte ecuații ...

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D} - \rho) = 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{B}) = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Densitatea de energie a câmpului  
electromagnetic

# Energia câmpului electromagnetic

$$P = \int \vec{j} \cdot \vec{E} dv$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow P = \int \left( \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} dv$$

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}$$

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv - \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{\sigma} =$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} - \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$$

# Vectorul Poynting $\vec{S}$

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}) dv - \int (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{\sigma} =$$

$$P = -\frac{\partial W}{\partial t} - \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$$

# Ec. Maxwell

*necunoscute...  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}, \rho$  (16 necunoscute)*

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3ec.)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3ec.)$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (3ec.)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P - \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3ec.) \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3ec.) \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

Ecuatiile lui [Maxwell](#)



# Ecuatiile Maxwell – condițiile de trecere (la limită)

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$H_{2t} - H_{1t} = i_s$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

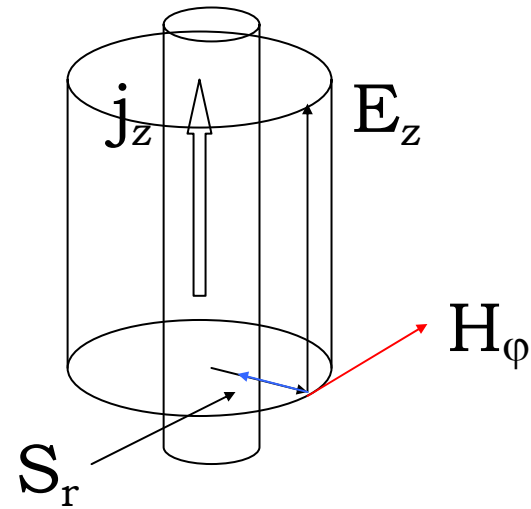
# Transmisia energiei

$$S_r = E_z H_\phi$$

$$E_z = \frac{j}{\gamma}$$

$$H_\phi = \frac{j\pi r^2}{2\pi r}$$

$$P = S_r 2\pi r L = \frac{j}{\gamma} \frac{j\pi r^2}{2\pi r} 2\pi r L = \frac{j^2}{\gamma} \pi r^2 L = \frac{j^2}{\gamma} V$$



# Ecuatia undelor

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right.$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \text{rot} \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} V \Rightarrow \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

# Condiția de etalonare

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{Lorentz})$$

# Ecuația undelor pentru V și A

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \vec{E} &= -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \left( -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\Delta V - \frac{\partial \operatorname{div} \vec{A}}{\partial t} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

# Ec. Undelor pentru E,H

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{D} = \rho \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{j} = 0$$

$$\rho = 0$$

# Calcul (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

# Soluția ecuației undelor (2D)

$$\Delta f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$f\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = f'$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = \pm \frac{1}{v} f'$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = f''$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(t \pm \frac{x}{v}\right) = \frac{1}{v^2} f''$$



# Soluția armonică (3D)

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[ j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R}) \right]$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{R}, t) = \vec{E}_0 \exp \left[ j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R}) \right]$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -jk_x E_x \dots \Rightarrow \nabla E_x = -j\vec{k} E_x$$

# Soluția armonică 3D

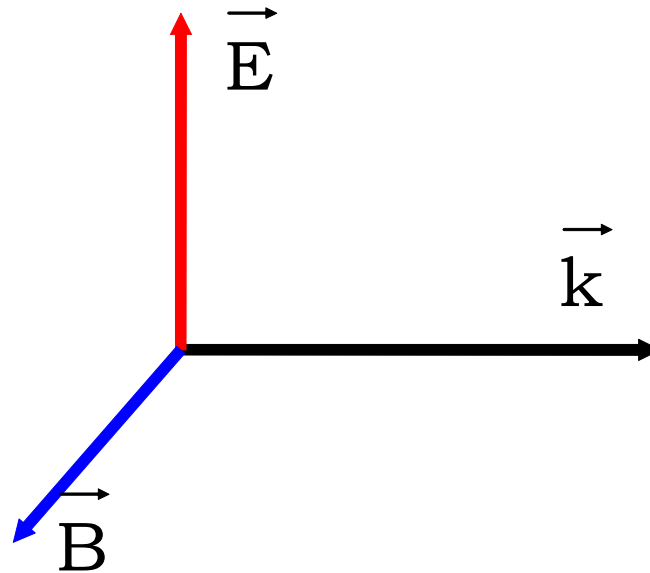
$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

$$\nabla = -jk\vec{k} \Rightarrow \Delta = \nabla \cdot \nabla = -k^2$$

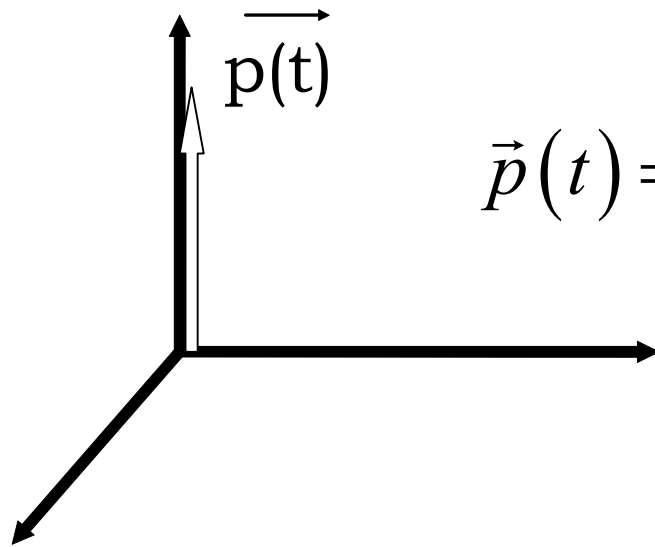
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -jk\vec{k} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{E} \\ -jk\vec{k} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ -jk\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ -jk\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

# Continuare ...

$$\left\{ \begin{array}{l} -j\vec{k} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 j\omega \vec{E} \Big| \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \\ -j\vec{k} \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ -j\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$



# Oscilatorul lui Hertz



$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin \omega t = p_0 \sin \omega t \vec{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_R = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2 \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P^3} + 2 \left( \frac{\omega}{v} \right) \frac{\cos \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P^2} \right] \\ E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P^3} + \left( \frac{\omega}{v} \right) \frac{\cos \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P^2} - \left( \frac{\omega}{v} \right)^2 \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P} \right] \\ E_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_R = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega p_0 \sin \theta \left[ \frac{\cos \left[ \omega \left( t - \frac{R_p}{v} \right) \right]}{R_p^2} - \left( \frac{\omega}{v} \right) \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_p}{v} \right) \right]}{R_p} \right] \end{array} \right.$$

# Câmpul aproape de sursă

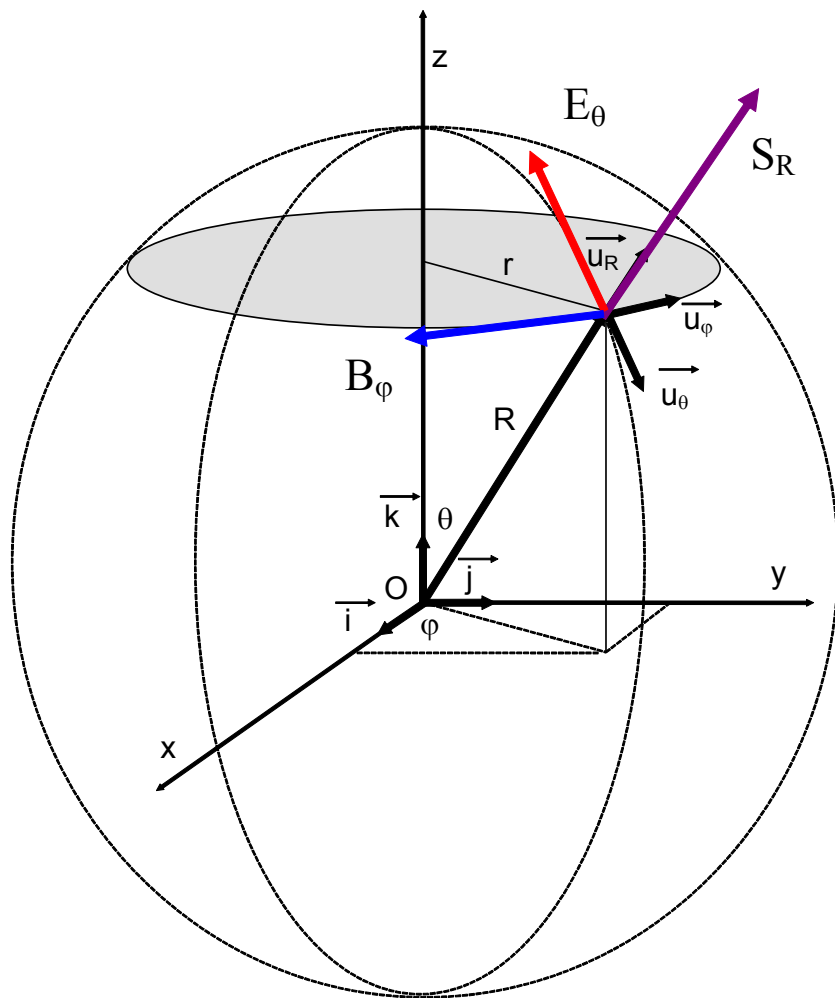
$$\left\{ \begin{array}{l} E_R = \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2 \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P^3} \right] \\ E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P^3} \right] \\ E_\varphi = 0 \end{array} \right.$$

# Zona undelor

$$\left\{ \begin{array}{l} E_R = 0 \\ E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P} \right] \\ E_\varphi = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} B_R = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega p_0 \sin \theta \left[ -\left(\frac{\omega}{v}\right) \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P} \right] \end{array} \right.$$



# Puterea emisă



$$S_R = \frac{E_\theta B_\varphi}{\mu_0}$$

$$E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P} \right]$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \omega p_0 \sin \theta \left[ -\left(\frac{\omega}{v}\right) \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P} \right]$$

$$S_R = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi} \omega p_0 \sin \theta \left( \frac{\omega}{v} \right)^3 \left\{ \frac{\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right]}{R_P} \right\}^2$$

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi S_R 2\pi R_P^2 \sin \theta d\theta = \frac{p_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^4}{v^3} \right) \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right] \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{p_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega^4}{v^3} \right) \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right] \times \frac{4}{3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 v^3} \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{R_P}{v} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 v^3}$$

# Puterea medie radiată $\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 v^3}$

- Radiația curenților alternativi de joasă frecvență este mică.
- Lumina solară care străbate atmosfera este difuzată de moleculele de aer care pot fi asimilate cu niște oscilatori elementari. Sub acțiunea undelor, oscilatorii efectuează oscilații forțate (departe de rezonanță, deci cu amplitudinea independentă de frecvența unde incidente). Intensitatea radiației luminii difuzate este proporțională cu frecvența (la puterea a patra). Deci, puterea radiată prin unda cu frecvența mai mare (culoarea albastră) este mult mai mare decât cea corespunzătoare luminii roșii. Cerul are culoarea albastră din acest motiv.
- [Domeniul de frecvență a undelor electromagnetice.](#)